گروه آزمایشی علوم ریاضی و فنی

آزمون ماز | پایهٔ دوازدهم



پاییز ۱۴۰۵

۲/۸ نیم‌سال اول دوازدهم

۱/۵ پایهٔ دهم

دفترچه پاسخ

جمعه ۱ آبان‌ماه ۱۴۰۵

ویژهٔ کنکـــوری‌های ۱۴۰۶

- پاسخنامه سریع؛ برای بررسی فوری بعد از آزمون
- تحلیل تمام گزینه‌های هر سؤال؛ برای بررسی سؤالاتی که پاسخ نادرست داده‌اید
- نکات و درسنامه‌های آموزشی؛ برای یادگیری کامل مباحث هر سؤال
- مشاورهٔ تستی؛ برای یادگیری انواع روش‌های حل تست
- استراتژی آزمون؛ برای یادگیری مدیریت زمان و مدیریت جلسهٔ آزمون

حق چاپ و تکثیر سؤالات به هر روش (الکترونیکی و...) پس از برگزاری آزمون برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز «گروه ماز» مجاز می‌باشد و با متخلفین برابر مقررات رفتار می‌شود.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

درس	مسئول درس	طراحان	ویراستاران
ریاضیات	مهرداد کیوان حسین شفیع‌زاده رسول حاجی‌زاده	حسین شفیع‌زاده ـ مهرداد کیوان محمدرضا حسینی‌فرد	ندا فرهختی ـ مائده بادان‌فیروز حمیدرضا ولی‌پور ـ یزدان نیک‌قدم ارسلان حسنوند ـ علی اسدی سپهر عندلیب‌مقدم مهدی سواری‌پور
فیزیک	سجاد صادقی‌زاده سعید احمدی	سعید احمدی ـ سجاد صادقی‌زاده غلامرضا محبی ـ محمد باغبان ـ سارا قانع محمدجواد سورچی ـ حسین عبدوی‌نژاد مجید رجبی‌وندچالی ـ محسن قندچلر	محمدجواد سورچی حنا خلعتبری ایلیا فقیه‌میرزائی
شیمی	فرشاد هادیان‌فرد	فرشاد هادیان‌فرد ـ طاها حق‌بین فرهنگ امیری ـ فاطمه محمودی ـ علی ترابی مهسا بایمانی‌نژاد ـ محمد کهنه‌پوشی عالیه میرزایی ـ علیرضا ستوده یاشار فیض‌اللهی	طاها حق‌بین ـ محمد دارابی‌جم امیرحسین مسلمی محمدرضا جمشیدی محمد داودآبادی‌فراهانی محمدمهدی معظمی

یک تیم با بیش از ۵۰۰ نفر در حال کار هستن تا آزمون‌های ماز با حداکثر کیفیت حاضر بشن و به شما کمک کنن و مسیر موفقیت رو براتون ساده‌تر کنن. همیشه از نظرات و کامنت‌های خوب‌تون انرژی می‌گیریم. مرسی که همراهمون هستین.

راستی! حتماً در نظرسنجی آزمون شرکت کنین و نظرات و پیشنهادات‌تون رو برامون بنویسین.

آموزش استراتژی آزمون و مدیریت جلسه کنکور

قسمت دوم

قلب؛ وقتی باک بنزینت خالی می‌شه چیکار کنی؟

سلام به رفیق هدفمند!

توی مقاله قبلی از راز ۳H گفتیم؛ یادت هست؟ هارت (Heart)، هَند (Hand)، هِد (Head).

امروز می‌خوایم بریم سراغ اولین و مهم‌ترین ضلع این ماجرا: هارت، یعنی همون قلب و انگیزه!

انگیزه چیه؟

خودمونی بگیم: «باک بنزین» تو! همون دلیلی که صبح با زنگ ساعت، به‌جای «پنج دقیقه دیگه بخوابم»، پتو رو کنار می‌زنی و می‌گی: «بلند شو که کلی کار داریم!»

انگیزه همون «چراییِ بزرگ» توئه: موفق شدن، رسیدن به رشته و دانشگاه تاپ و داشتن شغلی با جایگاه اجتماعی و درآمد عالی که از همه مهم‌تر، حالت باهاش خوب باشه و از زندگی لذت ببری.

اما رسیدن به این هدف با دو تا استوری انگیزشی یا یک‌شبه ممکن نیست؛ این مسیر استقامتیه، نه دوِ سرعت!

همراهی با ماز از همین حالا، تصمیم هوشمندانه‌ایه که مسیرت رو شفاف و میان‌بُر می‌کنه. ماز ۱۳ ساله دست بچه‌هایی مثل تو رو گرفته و تا قله همراهشون بوده؛ نقشه‌راه دست ماست، پس با خیال راحت دستت رو بسپار به ما!

واقعیت ماجرا: تو انسانی، ربات نیستی!

هیچ‌کس ۳۶۵ روز سال انگیزه‌اش صددرصد نیست! طبیعیه بعضی روزها حس کنی «پنچر شدی»، خسته‌ای، کم آوردی یا حوصلهٔ درس نداری؛ این ضعف تو نیست، مغز انسان همیشه با انگیزهٔ یکسان کار نمی‌کنه.

تفاوت آدمای موفق با بقیه چیه؟

آدمای موفق غصّه نمی‌خورن که «وای چرا امروز بی‌حوصله‌ام!»، بلکه اونا «پلن نجات از بی‌انگیزگی» دارن!

اجازه نمیدن یه بی‌حوصلگی یک‌ساعته، تبدیل بشه به یک هفته افسردگی و جا موندن از برنامه.

جعبه ابزار نجات؛ پلن تو برای وقت‌های پنچری چیه؟

وقتی حس کردی باکت خالی شده، از همون ساعت اول واکنش نشون بده؛ نذار این حال روزها کش بیاد! «منابع شارژ مجددت» رو بشناس و این جعبه‌ابزار رو دم دست داشته باش:

ریست فیزیکی و بدنی: گاهی مغزت فقط یه تغییر حال می‌خواد؛ دوش آب گرم، ۲۰ دقیقه پیاده‌روی سریع توی هوای آزاد، خوراکی دلخواه یا چند دقیقه نفس عمیق، خلوت و عبادت برای آرامش.

اتصال به دنیای واقعی: یه تماس ۵ دقیقه‌ای با رفیق یا فامیلِ دانشجوت، قشنگی مقصد رو یادت میاره؛ صحبت با یه مشاور کاربلد هم ذهنت رو مرتب می‌کنه.

تغییر محیط: پشت میز دیگه‌ای بشین، نور اتاق رو عوض کن یا یه ساعت برو کتابخونه.

حرف آخر: نذار پنچری طولانی بشه!

بی‌انگیزه شدن دستِ تو نیست و گریزناپذیره، اما توی بی‌انگیزگی موندن کاملاً انتخاب خودته!

همین امروز روی یه برگه کوچک بنویس:

«وقتی حالم بده یا انگیزه‌ام کمه، این ۳ تا کار رو انجام میدم:...»

این برگه می‌شه بیمهٔ مسیر تو.

موتور قلبت رو با اهداف بزرگ روشن نگه دار؛ ما هم توی ماز قدم‌به‌قدم کنارتیم تا این مسیرِ قشنگ رو با هم فتح کنیم!

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

پاسخنامه کلیدی

ریاضیات

۱	۱	۲	۳	**۴**	۱۱	**۱**	۲	۳	۴
۲	۱	۲	**۳**	۴	۱۲	۱	**۲**	۳	۴
۳	۱	۲	**۳**	۴	۱۳	۱	۲	۳	**۴**
۴	۱	**۲**	۳	۴	۱۴	۱	۲	۳	**۴**
۵	۱	۲	**۳**	۴	۱۵	**۱**	۲	۳	۴
۶	۱	۲	**۳**	۴	۱۶	۱	**۲**	۳	۴
۷	**۱**	۲	۳	۴	۱۷	۱	۲	۳	**۴**
۸	۱	۲	**۳**	۴	۱۸	۱	**۲**	۳	۴
۹	۱	**۲**	۳	۴	۱۹	**۱**	۲	۳	۴
۱۰	**۱**	۲	۳	۴	۲۰	۱	۲	۳	**۴**
۲۱	**۱**	۲	۳	۴	۳۱	**۱**	۲	۳	۴
۲۲	۱	۲	۳	**۴**	۳۲	۱	۲	۳	**۴**
۲۳	**۱**	۲	۳	۴	۳۳	۱	۲	۳	**۴**
۲۴	۱	۲	۳	**۴**	۳۴	**۱**	۲	۳	۴
۲۵	۱	**۲**	۳	۴	۳۵	۱	۲	۳	**۴**
۲۶	۱	**۲**	۳	۴	۳۶	۱	۲	۳	**۴**
۲۷	۱	۲	۳	**۴**	۳۷	۱	۲	۳	**۴**
۲۸	۱	**۲**	۳	۴	۳۸	۱	**۲**	۳	۴
۲۹	۱	۲	**۳**	۴	۳۹	۱	۲	**۳**	۴
۳۰	۱	**۲**	۳	۴	۴۰	۱	**۲**	۳	۴

فیزیک

۴۱	۱	۲	**۳**	۴	۵۱	۱	**۲**	۳	۴
۴۲	۱	۲	**۳**	۴	۵۲	۱	۲	**۳**	۴
۴۳	**۱**	۲	۳	۴	۵۳	۱	**۲**	۳	۴
۴۴	۱	۲	**۳**	۴	۵۴	۱	۲	۳	**۴**
۴۵	**۱**	۲	۳	۴	۵۵	۱	۲	**۳**	۴
۴۶	**۱**	۲	۳	۴	۵۶	۱	۲	۳	**۴**
۴۷	۱	۲	**۳**	۴	۵۷	۱	**۲**	۳	۴
۴۸	۱	**۲**	۳	۴	۵۸	۱	**۲**	۳	۴
۴۹	۱	۲	**۳**	۴	۵۹	۱	۲	۳	**۴**
۵۰	۱	۲	**۳**	۴	۶۰	**۱**	۲	۳	۴

۶۱	۱	۲	۳	**۴**					
۶۲	۱	**۲**	۳	۴					
۶۳	**۱**	۲	۳	۴					
۶۴	۱	**۲**	۳	۴					
۶۵	۱	۲	**۳**	۴					

شیمی

۶۶	**۱**	۲	۳	۴	۷۶	۱	۲	۳	**۴**
۶۷	۱	**۲**	۳	۴	۷۷	۱	**۲**	۳	۴
۶۸	۱	۲	۳	**۴**	۷۸	**۱**	۲	۳	۴
۶۹	۱	۲	**۳**	۴	۷۹	۱	۲	**۳**	۴
۷۰	**۱**	۲	۳	۴	۸۰	**۱**	۲	۳	۴
۷۱	۱	۲	۳	**۴**	۸۱	۱	**۲**	۳	۴
۷۲	۱	**۲**	۳	۴	۸۲	۱	۲	۳	**۴**
۷۳	۱	۲	۳	**۴**	۸۳	۱	**۲**	۳	۴
۷۴	**۱**	۲	۳	۴	۸۴	۱	۲	۳	**۴**
۷۵	۱	۲	۳	**۴**	۸۵	۱	۲	۳	**۴**

۸۶	۱	۲	۳	**۴**					
۸۷	۱	۲	۳	**۴**					
۸۸	۱	**۲**	۳	۴					
۸۹	۱	۲	۳	**۴**					
۹۰	**۱**	۲	۳	۴					
۹۱	۱	۲	۳	**۴**					
۹۲	۱	۲	**۳**	۴					
۹۳	۱	**۲**	۳	۴					
۹۴	۱	۲	۳	**۴**					
۹۵	۱	۲	۳	**۴**					

سختی تصادفی بعضی دروس در آزمون های ماز

مازی عزیز!

سطح سؤالات کنکور همیشه قابل پیش‌بینی نیست؛ ممکنه بعضی درس‌ها سخت‌تر یا آسون‌تر از چیزی باشن که انتظار داری.

برای همین، توی بعضی آزمون‌های ماز، به صورت تصادفی و غیرقابل پیش‌بینی، گاهی بعضی درس‌ها رو سخت‌تر طراحی می‌کنیم.

چرا؟

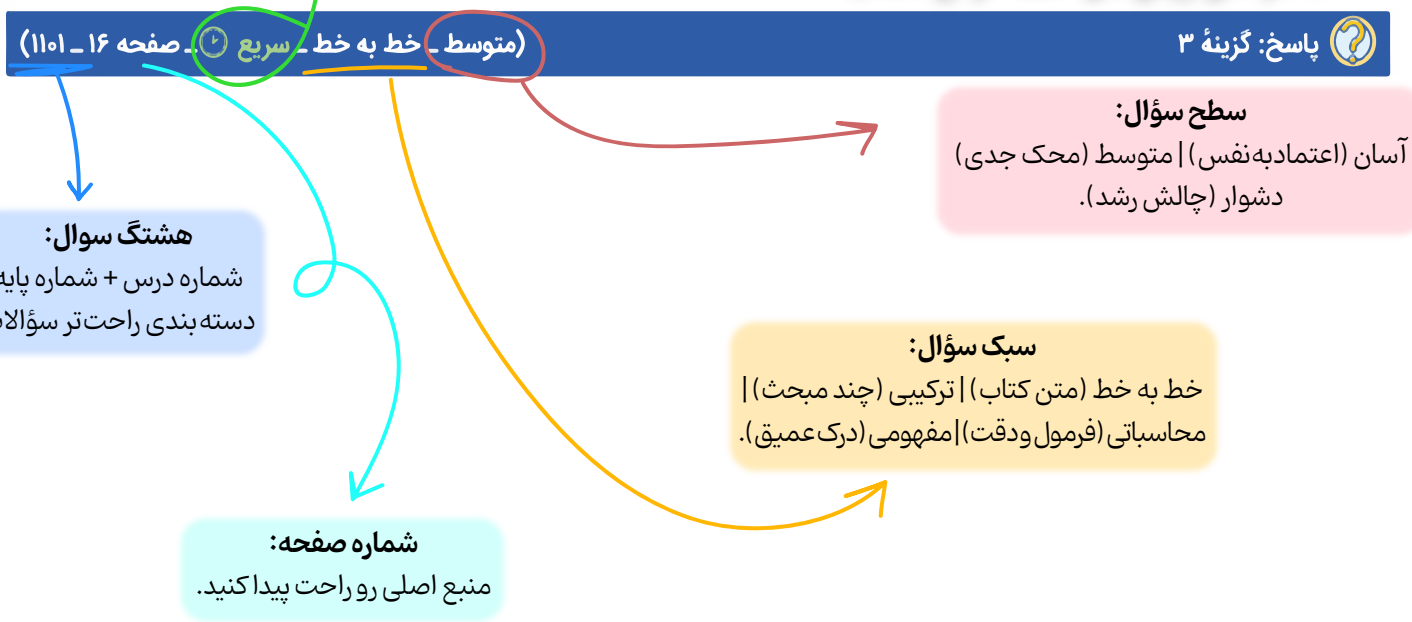
که روز کنکور غافلگیر نشی!

چون توی آزمون ماز فقط نکات کنکور رو برات پیش‌بینی نمی‌کنیم؛ بلکه شرایط مختلف کنکور رو هم برات شبیه‌سازی می‌کنیم.

پس اگه با یه درس سخت توی آزمون ماز مواجه شدی، بدون که داریم برای روزی آماده‌ات می‌کنیم که ممکنه کنکور سخت‌تر از انتظار تو باشه.

باتشکر
واحد آزمون ماز

راهنمای پاسخنامه آزمون ها



یادتون باشه:

- ✓ هر سؤال یک فرصت یادگیریه، نه یک مانع.
- ✓ پاسخ‌نامه فقط جواب نیست؛ یک کارگاه آموزشی کامله.
- ✓ با هر آزمون و مرور این پاسخ‌نامه، یک پله بالاتر می‌رید و یک قدم به رؤیاتون نزدیک‌تر می‌شید.
- ✓ موفقیت فقط برای کسایی‌یه که با برنامه و انگیزه حرکت می‌کنن. شما همون آدمید.

بودجه‌بندی این آزمون

حسابان ۲: تابع، صفحه‌های ۱ تا ۲۲
ریاضی پایه: تابع، ریاضی ۱ صفحه‌های ۹۴ تا ۱۱۷ + حسابان ۱ صفحه‌های ۳۷ تا ۷۰
هندسه ۳: ماتریس و کاربردها (تا ابتدای حل دستگاه معادلات با استفاده از ماتریس وارون)، صفحه‌های ۹ تا ۲۳
هندسه پایه: قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن، هندسه ۱ صفحه‌های ۲۹ تا ۳۷
گسسته: آشنایی با نظریه اعداد، صفحه‌های ۱ تا ۱۲

سهم در کنکور

حسابان ۲: از این مبحث به‌طور مستقیم تستی در کنکور طرح نشده است.
ریاضی پایه: از این مبحث به‌طور مستقیم تستی در کنکور طرح نشده است.
هندسه ۳: این مبحث در مجموع ۱ تست کنکور را پوشش داده است.
هندسه پایه: این مبحث در مجموع ۱ تست کنکور را پوشش داده است.
گسسته: از این مبحث به‌طور مستقیم تستی در کنکور طرح نشده است.

سلام به مازی‌های عزیز

خیلی سریع قبل از دیدن پاسخ‌نامه، چند تا نکتهٔ مهم رو راجع به آزمون با هم بررسی کنیم:

«تابع» یکی از مباحث مهم و پایه‌ای ریاضیاته که تو هر سه‌تا کتاب ریاضی ۱، حسابان ۱ و حسابان ۲ یک فصل رو به خودش اختصاص داده. مبحث تابع سنگ بنای ریاضیاته و بدون اون خیلی از مفاهیم بعدی رو نمی‌تونیم حتی تعریف کنیم! پس این فصل نه تنها می‌تونه به‌طور مستقیم مورد سؤال واقع بشه بلکه حتی در مباحث دیگه هم به‌طور غیرمستقیم کاربرد داره! توزیع تعداد تست مستقیمش در کنکور و نمره‌ش در امتحان نهایی رو در جدول زیر می‌بینید:

نام فصل	تعداد تست در کنکور	بارم در امتحان نهایی
تابع	۲ الی ۳ تست	۲/۵ نمره

سؤالات تابع می‌تونن از مباحث هر سه پایه و با سطوح مختلفی از ترکیب مفاهیم مطرح بشن. حتی در کنکور، سؤالاتی دیده شده که تنها بر مباحث تابع در یک پایه تکیه داشتن. به همین دلیل، توصیه می‌کنیم که علاوه بر تسلط کامل به مفاهیم و نکات آموزشی، سؤالات کنکور سال‌های گذشته و تست‌های مشابه اون‌ها رو هم با دقت بررسی و تحلیل کنین تا با تیپ‌های مختلف سؤالات و نحوهٔ ترکیب مباحث سال‌های مختلف آشنا بشین. بنابراین تسلط به این مبحث می‌تونه نقش مهمی در موفقیت شما در درس ریاضی داشته باشه.

موفق باشید.

حسین شفیع‌زاده و مهرداد کیوان ـ مسئولین درس ریاضی آزمون‌های تستی ریاضی ماز

۱- اگر $f=\{(1,2),(2,3),(3,-1)\}$ و $g=\{(2,3),(1,1),(3,2)\}$ باشد، مجموع اعضای برد تابع $(f+g)of$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

پاسخ: گزینهٔ ۴ (آسان ـ محاسباتی ـ سریع ـ حسابان ۱ صفحهٔ ۶۹ ـ ۱۱۰۲)

ابتدا باید مجموع دو تابع را به دست آوریم:

$$D_{f+g}=D_f\cap D_g=\{1,2,3\}$$
$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)\Rightarrow f+g=\{(1,3),(2,6),(3,1)\}$$
$$(f+g)of(1)=(f+g)(f(1))=(f+g)(2)=6$$
$$(f+g)of(2)=(f+g)(f(2))=(f+g)(3)=1$$
$$(f+g)of(3)=(f+g)(f(3))=(f+g)(-1)=\text{تعریف نشده}$$
$$\Rightarrow (f+g)of=\{(1,6),(2,1)\}$$

بنابراین برد تابع موردنظر برابر با مجموعهٔ $\{1,6\}$ است. پس مجموع اعضای برد $6+1=7$ می‌باشد.

اعمال روی توابع

اگر f و g دو تابع دلخواه با دامنه‌های D_f و D_g باشند، آن‌گاه:

۱) $D_{(f+g)} = D_f \cap D_g \ , \ (f+g)(x) = f(x) + g(x)$

۲) $D_{(f-g)} = D_f \cap D_g \ , \ (f-g)(x) = f(x) - g(x)$

۳) $D_{(fg)} = D_f \cap D_g \ , \ (fg)(x) = f(x) \times g(x)$

۴) $D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x | g(x) = ۰\} \ , \ (\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

۵) $D_{fog} = \{x \in D_g | g(x) \in D_f\} \ , \ fog(x) = f(g(x))$

ماز

۲- اگر ضابطهٔ وارون تابع $g(x) = \sqrt{x+۳} - ۲$ قسمتی از تابع $f(x) = x^۲ + ax + b$ باشد، مقدار $a-b$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) -۲ ۳) ۳ ۴) -۱

پاسخ: گزینهٔ ۳ (آسان ـ خط‌به‌خط ـ سریع ـ حسابان ۱ صفحهٔ ۶۲ ـ ۱۱۰۲)

روش اول

ضابطهٔ وارون تابع g را می‌یابیم:

$$g(x) = y = \sqrt{x+۳} - ۲$$

$$\sqrt{x+۳} = y+۲ \xrightarrow[y \geq -۲]{\text{توان ۲}} x+۳ = (y+۲)^۲ \Rightarrow x = (y+۲)^۲ - ۳ \xrightarrow{y,x \text{ تعویض}} y = (x+۲)^۲ - ۳$$

$$g^{-۱}(x) = x^۲ + ۴x + ۱ \ ; \ x \geq -۲$$

در محدودهٔ دامنه وارون g:

$$\Rightarrow f(x) = g^{-۱}(x) = x^۲ + ۴x + ۱$$

پس $a = ۴, b = ۱, a-b = ۳$ است.

روش دوم

چون در بازهٔ $[-۲, +\infty)$، $f(x) = g^{-۱}(x)$ پس $fog(x)$ بر روی دامنه‌اش تابع **همانی** است و داریم:

$$fog(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x+۳} - ۲) = x + ۳ + ۴ - ۴\sqrt{x+۳} + a\sqrt{x+۳} - ۲a + b$$

$$(a-۴)\sqrt{x+۳} + x + (۷ - ۲a + b) \Rightarrow \begin{cases} ۷ - ۲a + b = ۰ \Rightarrow b = ۱ \\ a - ۴ = ۰ \Rightarrow a = ۴ \end{cases}$$

درنتیجه:

$$a - b = ۳$$

روش به‌دست آوردن ضابطهٔ تابع وارون

در تابع یک‌به‌یک $y = f(x)$، ابتدا x را برحسب y می‌نویسیم (یعنی x را تنها می‌کنیم و از معادله استخراج می‌کنیم.) سپس با تبدیل y به x ضابطهٔ $f^{-۱}(x)$ به‌دست می‌آید.

یه نمونه باحال ببین!

وارون تابع $f(x) = \frac{۳x-۱}{۲-x}$ را به‌دست آورید.

$$y = \frac{۳x-۱}{۲-x} \Rightarrow ۳x - ۱ = ۲y - xy \Rightarrow ۳x + xy = ۲y + ۱ \Rightarrow x = \frac{۲y+۱}{۳+y} \Rightarrow f^{-۱}(x) = \frac{۲x+۱}{۳+x}$$

نکته!

ترکیب هر تابع با وارونش همانی است.

$f^{-1}of(x)=x$; در دامنهٔ f

$fof^{-1}(x)=x$; در دامنهٔ f^{-1}

ماز

۳- اگر $f(x)=2x-[x]$ و $f(af(\frac{3}{2}))=1$ باشد، مقدار a کدام می‌تواند باشد؟ ($[\ ]$ نماد جزء صحیح است.)

۱) ۱/۲۵ ۲) ۰/۷۵ ۳) ۰/۲۵ ۴) ۱/۵

پاسخ: گزینهٔ ۳ (آسان ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ حسابان ۱ صفحهٔ ۵۱ ـ ۱۱۰۲)

$f(x)=2x-[x]$

$f(\frac{3}{2})=3-\underbrace{[\frac{3}{2}]}_{1}=2$

$f(af(\frac{3}{2}))=1\Rightarrow f(2a)=1\Rightarrow 4a-[2a]=1$

روش اول

با آزمایش گزینه‌ها، $a=0/25$ قابل‌قبول است.

روش دوم

$4a-[2a]=1\Rightarrow [2a]=4a-1$

$\xrightarrow{(4a)\in\mathbb{Z}} 4a-1\le 2a<4a\Rightarrow \begin{cases}2a\le 1\Rightarrow a\le\frac{1}{2}\\ 2a>0\Rightarrow a>0\end{cases}\Rightarrow 0<a\le\frac{1}{2},(4a)\in\mathbb{Z}\Rightarrow a=0/25, a=0/5$

جزءصحیح

اگر x عددی بین دو عدد صحیح n و $n+1$ باشد یا $x=n$ باشد، آن‌گاه:

$[x]=n$

به عبارت دیگر:

$n\le x<n+1\Rightarrow [x]=n$

نکته!

برای هر $k\in\mathbb{Z}$ از $[x]=k$ می‌توان نتیجه گرفت:

$[x]=k\xrightarrow{k\in\mathbb{Z}} k\le x<k+1$

ماز

۴- باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $f(x)=x^3+ax^2+bx+1$ بر $x-2$ و $x+1$ به‌ترتیب برابر a و b است. مقدار b چقدر است؟

۱) $-\frac{9}{4}$ ۲) $-\frac{9}{8}$ ۳) $-\frac{5}{8}$ ۴) $-\frac{5}{4}$

پاسخ: گزینهٔ ۲ (آسان ـ خط‌به‌خط/محاسباتی ـ سریع ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۲۲ ـ ۱۲۰۱)

با استفاده از راه سریع به دست آوردن باقی‌مانده داریم:

$\begin{cases}f(2)=a\Rightarrow 4a+2b+9=a\\ f(-1)=b\Rightarrow a-b=b\end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۳a+۲b=-۹ \\ a=۲b \end{cases} \Rightarrow ۳(۲b)+۲b=-۹ \Rightarrow b=-\frac{۹}{۸}$$

قضیهٔ تقسیم

در تقسیم چندجمله‌ای $A(x)$ بر چندجمله‌ای $B(x)$، اگر خارج‌قسمت $q(x)$ و باقی‌مانده $r(x)$ فرض شود، داریم:

مقسوم ↑
$A(x)$ | $B(x)$ → مقسوم‌علیه
$\vdots$ $q(x)$ → خارج‌قسمت
$r(x)$ → باقی‌مانده

$$A(x)=B(x)\times q(x)+r(x)$$

درجهٔ باقی‌مانده!

درجهٔ باقی‌مانده یعنی $r(x)$ باید از درجهٔ مقسوم‌علیه کمتر باشد.

درجهٔ خارج‌قسمت!

به طور کلی، اگر مقسوم از درجهٔ n و مقسوم‌علیه از درجهٔ m باشد $(n>m)$، آن‌گاه خارج‌قسمت از درجهٔ $n-m$ و باقی‌مانده حداکثر از درجهٔ $m-۱$ است.

باقی‌ماندهٔ تقسیم بر چندجمله‌ای خطی $ax+b$

اگر مقسوم‌علیه از درجهٔ اول باشد، باقی‌مانده از درجهٔ صفر (عدد) است که برای محاسبهٔ آن، کافی است **ریشهٔ مقسوم‌علیه** را در **مقسوم** **جای‌گذاری** کنیم.

$p(x)$ | $ax+b$
$\vdots$ $q(x)$
r

$$p(x)=(ax+b)\times q(x)+r \xrightarrow{x=-\frac{b}{a}} r=p(-\frac{b}{a})$$

یه نمونهٔ باحال ببین!

باقی‌ماندهٔ تقسیم $x^۳+x-۷$ بر $x-۲$ را محاسبه کنید.

$x=۲$ ↑
$x^۳+x-۷$ | $x-۲$
$\vdots$
R

$$R=۲^۳+۲-۷=۳$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۵- اگر $f(x)=\begin{cases} ax+2 & |x|\le 2 \\ bx^2+3x & |x|\ge 2 \end{cases}$ یک تابع باشد، مقدار $[-ab]$ کدام است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است)

۱) -1 ۲) -4 ۳) -2 ۴) -3

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ حسابان ۱ صفحهٔ ۵۳ ـ ۱۱۰۲)

مقدار تابع در $x=2$ و $x=-2$ در دو ضابطهٔ **بالایی** و **پایینی** باید **یکسان** باشد:

$$\begin{cases} x=2 \Rightarrow 2a+2=6+4b \Rightarrow a-2b=2 \\ x=-2 \Rightarrow -2a+2=-6+4b \Rightarrow a+2b=4 \end{cases}$$

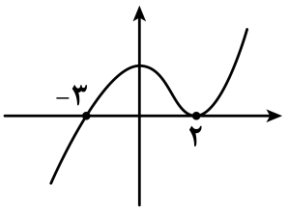
پس $a=3$ و $b=\frac{1}{2}$ است و درنتیجه داریم:

$$[-ab]=\left[-\frac{3}{2}\right]=[-1/5]=-2$$

یادآوری!

برای آن‌که **شرط تابع بودن** برای توابع دوضابطه‌ای برقرار باشد، باید علاوه بر **تابع بودن ضابطه‌ها** در دامنه‌شان، دامنه‌ها **اشتراک نداشته باشند** و اگر اشتراک داشتند، باید **مقدار تابع در نقاط مشترک** در هر دو ضابطه با هم **برابر** باشند.

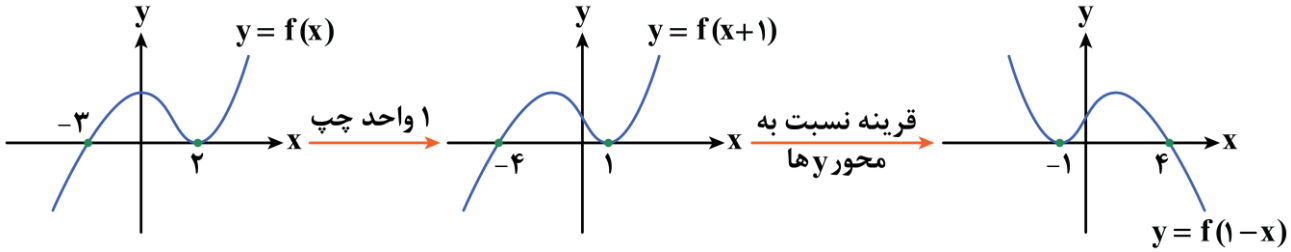
۶- نمودار تابع f به‌صورت زیر است. دامنهٔ تابع $y=\sqrt{\frac{x+2}{f(1-x)}}$ شامل چند عدد صحیح است؟



۱) ۴
۲) ۶
۳) ۵
۴) ۳

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۳ و ۹ ـ ۱۲۰۱)

نمودار $y=f(1-x)$ را رسم می‌کنیم و زیر رادیکال را تعیین علامت می‌کنیم:



x		-2		-1		4	
$x+2$	$-$	۰	$+$		$+$		$+$
$f(1-x)$	$+$		$+$	۰	$+$	۰	$-$
P	$-$	۰	$+$	ت ن	$+$	ت ن	$-$

پس دامنه به‌صورت $[-2,4)-\{-1\}$ است که شامل ۵ عدد صحیح $-2,-1,0,1,2,3$ است.

رسم نمودار تابع $y=kf(ax+b)+h$

اگر نمودار تابع $y=f(x)$ را در اختیار داشته باشیم، برای رسم نمودار تابع $y=kf(ax+b)+h$ به **ترتیب** زیر عمل می‌کنیم $(a\neq 0)$:

الف) تاثیرات روی دامنه

۱) تأثیر عدد ثابت b: اگر $b>0$ باشد، نمودار تابع را به اندازهٔ b واحد به **سمت چپ** و اگر $b<0$ باشد، نمودار تابع را به اندازهٔ $|b|$ واحد به **سمت راست** منتقل می‌کنیم.

۲) تأثیر ضریب x: طول تمامی نقاط را در $\frac{۱}{|a|}$ **ضرب** می‌کنیم. (اگه a **منفی** باشه نمودار تابع نسبت به محور yها **قرینه** هم می‌شه.)

ب) تاثیرات روی برد

۳) تأثیر ضریب k: عرض تمامی نقاط را در $|k|$ **ضرب** می‌کنیم. (اگه k **منفی** باشه نمودار تابع نسبت به محور xها **قرینه** هم می‌شه.)

۴) تأثیر عدد ثابت h: اگر $h>۰$ باشد، نمودار تابع را به اندازهٔ h واحد به سمت **بالا** و اگر $h<۰$ باشد، نمودار تابع را به اندازهٔ $|h|$ واحد به سمت **پایین** منتقل می‌کنیم.

دامنهٔ توابع رادیکالی

برای به‌دست آوردن دامنهٔ توابع رادیکالی با فرجهٔ زوج باید زیر رادیکال **نامنفی** باشد.

۷- تابع $f(x)=x^۲+ax+۳$ مفروض است. به‌ازای کدام مقدار a، نمودار توابع $f(۲-x)$ و $f(x+۶)$ بر هم منطبق هستند؟

۱) -۸ ۲) -۴ ۳) ۴ ۴) ۸

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ ترکیبی ـ استاندارد ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۳ و ۹ ـ ۱۲۰۱)

روش اول

کافی است رأس سهمی‌ها بر هم منطبق باشند. دقت کنید که **انبساط** و **انقباض** نداریم و فقط **انتقال افقی** داریم، بنابراین برد نیز تغییر نکرده است. طول رأس سهمی f برابر $x=-\frac{a}{۲}$ است.

$$f(x)\xrightarrow{\text{۲واحد به چپ}}f(x+۲)\xrightarrow[\text{محور yها}]{\text{قرینه نسبت به}}f(-x+۲)$$

$$x=-\frac{a}{۲}\Rightarrow x=-\frac{a}{۲}-۲\Rightarrow x=-(-\frac{a}{۲}-۲)=\frac{a}{۲}+۲$$

$$f(x)\xrightarrow{\text{۶ واحد به چپ}}f(x+۶)$$

$$x=-\frac{a}{۲}\Rightarrow x=-\frac{a}{۲}-۶$$

بنابراین:

$$\frac{a}{۲}+۲=-\frac{a}{۲}-۶\Rightarrow a=-۸$$

روش دوم

$$f(۲-x)=f(x+۶)$$

$$\Rightarrow (۲-x)^۲+a(۲-x)+۳=(x+۶)^۲+a(x+۶)+۳$$

$$\Rightarrow ۴-۴x+\cancel{x^۲}+۲a-ax=\cancel{x^۲}+۱۲x+۳۶+ax+۶a\Rightarrow -(a+۴)x+۲a+۴=(۱۲+a)x+۶a+۳۶$$

$$\Rightarrow -۴-a=۱۲+a\Rightarrow a=-۸$$

روش سوم

جایگذاری عدد:

$$x=۲\Rightarrow f(۲+۶)=f(۲-۲)\Rightarrow f(۸)=f(۰)\xrightarrow{f(x)=x^۲+ax+۳}۶۴+۸a+۳=۳\Rightarrow ۸a=-۶۴\Rightarrow a=-۸$$

۸- نمودار سهمی $f(x)=x^۲+۲x+۴$ را ۳ واحد به راست انتقال داده، سپس نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم. اگر نمودار حاصل را k واحد به بالا انتقال دهیم بر نمودار f مماس می‌شود. k کدام است؟

۱) $\frac{۱۵}{۲}$ ۲) $\frac{۱۷}{۲}$ ۳) $\frac{۲۱}{۲}$ ۴) $\frac{۹}{۲}$

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۳ و ۷ ـ ۱۲۰۱)

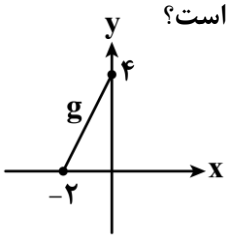
تبدیلات ذکرشده را اعمال می‌کنیم:

$$y=f(x)\xrightarrow[x\to x-۳]{\text{۳ واحد به راست}}y=f(x-۳)\xrightarrow[\text{محور xها}]{\text{قرینه نسبت به}}y=-f(x-۳)\xrightarrow{k\text{ واحد بالا}}y=k-f(x-۳)$$

حال تابع حاصل را با f **تقاطع** می‌دهیم و Δ **معادلهٔ تلاقی** را برابر **صفر** قرار می‌دهیم:

$$f(x)=k-f(x-۳)$$
$$\Rightarrow x^۲+۲x+۴=k-(x-۳)^۲-۲(x-۳)-۴$$
$$\Rightarrow ۲x^۲-۲x+۱۱-k=۰$$
$$\Delta=۰\Rightarrow(-۲)^۲-۴(۲)(۱۱-k)=۰\xrightarrow{\div ۴}۱-۲۲+۲k=۰\Rightarrow k=\frac{۲۱}{۲}$$

۹- نمودار تابع g به‌صورت مقابل است. اگر $f(x)=\sqrt{۵-۲x}$ باشد، دامنهٔ تابع $fog(\frac{x}{۲})$ شامل چند عدد صحیح است؟



۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۱

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ حسابان ۱ صفحهٔ ۶۷ ـ ۱۱۰۲)

دامنهٔ تابع رادیکالی f بازهٔ $(-\infty,\frac{۵}{۲}]$ است:

$$۵-۲x\geq ۰\Rightarrow ۲x\leq ۵\Rightarrow x\leq\frac{۵}{۲}$$

ضابطهٔ g به‌صورت $y=۲x+۴$ است.

$$D_{fog(\frac{x}{۲})}=\left\{x\middle|\frac{x}{۲}\in D_g,g(\frac{x}{۲})\in D_f\right\}=\left\{x\middle|-۲\leq\frac{x}{۲}\leq ۰,(x+۴)\leq\frac{۵}{۲}\right\}$$
$$=\left\{x\middle|-۴\leq x\leq ۰,x\leq-\frac{۳}{۲}\right\}=\left[-۴,-\frac{۳}{۲}\right]$$

۳ عدد صحیح -۴، -۳ و -۲ عضو دامنه‌اند.

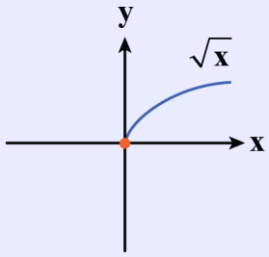
توابع رادیکالی

به‌طور کلی توابع به فرم $y=\sqrt[n]{f(x)}$ را توابع رادیکالی می‌نامند.

دامنهٔ تابع رادیکالی: برای محاسبهٔ دامنهٔ تابع $y=\sqrt[۲k]{f(x)}$ (با فرجهٔ زوج) کافی است نامعادلهٔ $f(x)\geq ۰$ را حل کنیم و حاصل را با دامنهٔ تابع f اشتراک بگیریم.

$$D=D_f\cap\{x|f(x)\geq ۰\}$$

رسم توابع رادیکالی: بهترین روش برای رسم توابع رادیکالی استفاده از تبدیلات نمودارها روی نمودار پایه‌ای زیر است. با دانستن این نمودار و انتقال‌ها می‌توان به سادگی تابع $a\sqrt{bx+c}+d$ را رسم کرد.



ماز

۱۰- دامنهٔ تابع $y=\sqrt{۲-\sqrt{x+k}}$ حداکثر چند عدد صحیح را شامل می‌شود؟

۱) ۵ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ حسابان ۱ صفحهٔ ۴۷ ـ ۱۱۰۲)

زیر رادیکال‌ها **نباید منفی** باشد:

$$\begin{cases} x+k\geq ۰ \\ ۲-\sqrt{x+k}\geq ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\geq -k \\ x+k\leq ۴ \Rightarrow x\leq ۴-k \end{cases}$$

پس $-k\leq x\leq -k+۴$ است.

اگر $k\in\mathbb{Z}$ باشد، آن‌گاه حداکثر تعداد اعداد صحیح را در دامنه داریم که برابر ۵ است.

توجه!

اگر k صحیح نباشد، این بازه تنها ۴ عدد صحیح را می‌تواند دربرگیرد.

ماز

۱۱- تابع $f(x)=(x+a)(۲x+b)+ax^۲$ مفروض است. اگر تابع $y=۲f(x)+k$ همانی باشد. مقدار $\frac{k}{b}$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ ریاضی ۱ صفحهٔ ۱۱۰ ـ ۱۰۰۵)

ضابطهٔ f را ساده می‌کنیم و ضابطهٔ $y=۲f(x)+k$ را برابر با ضابطهٔ تابع **همانی** $y=x$ قرار می‌دهیم:

$$f(x)=۲x^۲+(b+۲a)x+ab+ax^۲ \Rightarrow f(x)=(a+۲)x^۲+(b+۲a)x+ab$$

$$y=۲f(x)+k=(۲a+۴)x^۲+(۲b+۴a)x+۲ab+k$$

تابع حاصل برابر با تابع همانی $y=x$ است. پس:

$$\begin{cases} ۲a+۴=۰ \Rightarrow a=-۲ \\ ۲b+۴a=۱ \Rightarrow b=\frac{۹}{۲} \\ ۲ab+k=۰ \Rightarrow k=۱۸ \end{cases} \Rightarrow \frac{k}{b}=۴$$

تابع همانی

تابعی است که هر عضو از دامنه را دقیقاً به همان عضو در برد، نظیر می‌کند، به عبارت دیگر **دامنه و برد** تابع همانی با هم **برابر** هستند.

$$f(x)=x$$

ماز

۱۲- تابع $f(x)=\log_{0/2}(x)$ را در نظر بگیرید. اگر مجموعه جواب نامعادلهٔ $f(2-x)<f(2x+6)$ برابر بازهٔ I باشد، طول این بازه چقدر است؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{5}{3}$ ۳) ۳ ۴) ۵

پاسخ: گزینهٔ ۲ (سخت ـ ترکیبی ـ استاندارد ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۱۷ ـ ۱۲۰۱)

چون مبنای تابع لگاریتمی f برابر با ۰/۲ است، تابع **نزولی اکید** و **دامنهٔ** آن اعداد **مثبت** است.

$$f(2-x)<f(2x+6) \xrightarrow{f \text{ نزولی اکید}} 2-x>2x+6 \Rightarrow 3x<-4 \Rightarrow x<-\frac{4}{3} \quad (I)$$

از طرفی شرط دامنه را بررسی می‌کنیم:

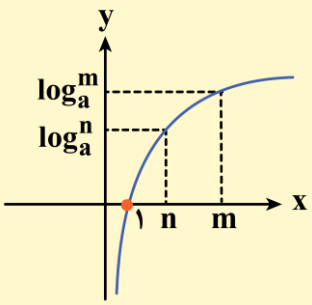
$$\begin{cases} 2-x>0 \\ 2x+6>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<2 \\ x>-3 \end{cases} \Rightarrow -3<x<2 \quad (II)$$

از اشتراک جواب‌های (I) و (II)، محدودهٔ x به‌صورت $-3<x<-\frac{4}{3}$ است. طول بازهٔ $I=(-3,-\frac{4}{3})$ برابر $-\frac{4}{3}+3=\frac{5}{3}$ است.

نمودار تابع لگاریتمی

برای تابع $y=\log_a^x$ بسته به پایهٔ لگاریتم، دو حالت وجود دارد.

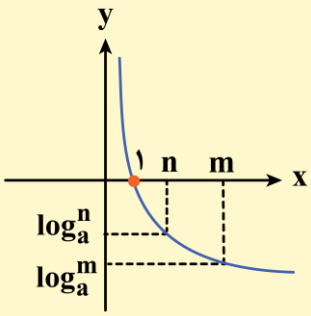
حالت ۱)



$y=\log_a^x (a>1)$

$n<m \Leftrightarrow \log_a^n < \log_a^m$

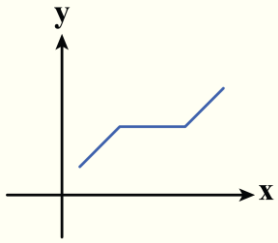
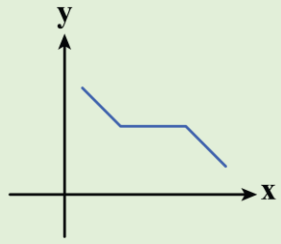
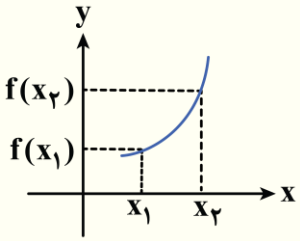
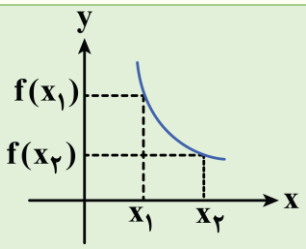
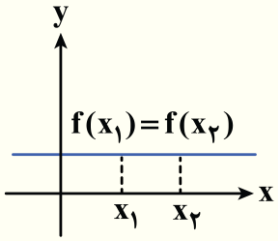
حالت ۲)



$y=\log_a^x (0<a<1)$

$n<m \Leftrightarrow \log_a^n > \log_a^m$

توابع یکنوا

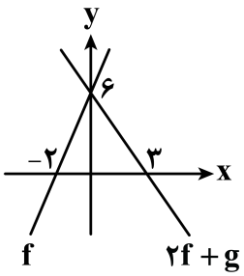
تابع	توضیح	تعریف ریاضی	مثال نموداری
صعودی	با افزایش x، مقدار تابع f(x) افزایش می‌یابد و یا اینکه ثابت می‌ماند.	$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$	
نزولی	با افزایش x، مقدار تابع f(x) کاهش می‌یابد و یا اینکه ثابت می‌ماند.	$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2)$	
اکیداً صعودی	با افزایش x، مقدار تابع f(x) همواره افزایش می‌یابد.	$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$	
اکیداً نزولی	با افزایش x، مقدار تابع f(x) همواره کاهش می‌یابد.	$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$	
تابع ثابت (هم صعودی و هم نزولی)	با افزایش x، مقدار تابع f(x) همواره ثابت است.	$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$	

توجه!

به تابعی که **نه صعودی** باشد و **نه نزولی**، تابع **غیریکنوا** می‌گوییم. به عبارت دیگر تابع غیریکنوا تابعی است که در دامنهٔ تعریف خود در بخش‌هایی صعودی و در بازه‌هایی نزولی باشد.

SanjeshCloud

۱۳- نمودار توابع خطی f و $2f+g$ به‌صورت مقابل است. به‌ازای کدام مقدار a، تابع $y=af(x)+(1-a)g(x)$ هم صعودی است و هم نزولی؟



۱) $\frac{۴}{۷}$
۲) $\frac{۴}{۵}$
۳) $\frac{۸}{۹}$
۴) $\frac{۸}{۱۱}$

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ زمان‌بر ـ حسابان۲ صفحهٔ ۱۶ ـ ۱۲۰۱)

ضابطهٔ تابع‌ها را می‌نویسیم:

$$\begin{cases} f(x)=3x+6 \\ 2f(x)+g(x)=-2x+6 \end{cases} \Rightarrow 6x+12+g(x)=-2x+6 \Rightarrow g(x)=-8x-6$$

تابع خواسته‌شده باید **ثابت** باشد. (**هم صعودی و هم نزولی**)

$$y=af(x)+(1-a)g(x)=a(3x+6)+(1-a)(-8x-6) \Rightarrow y=(3a-8+8a)x+12a-6$$

ضریب x (شیب) باید **صفر** باشد، پس:

$$3a-8+8a=0 \Rightarrow 11a-8=0 \Rightarrow a=\frac{8}{11}$$

تنها تابع صعودی و نزولی همزمان

تنها تابعی که **هم صعودی** و **هم نزولی** است، تابع **ثابت** است.

۱۴- وارون تابع $f(x)=\sqrt{mx}.\sqrt{3x+m}$ خط $y=2x-3$ را در نقطه‌ای به عرض یک قطع می‌کند. مقدار $f(8)$ کدام است؟

۱) $2\sqrt{2}$
۲) $4\sqrt{2}$
۳) $6\sqrt{2}$
۴) $10\sqrt{2}$

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ حسابان ۱ صفحهٔ ۵۴ ـ ۱۱۰۲)

نقطهٔ تقاطع:

$$y=2x-3 \xrightarrow{y=1} x=2 \Rightarrow A(2,1)$$

پس f^{-1} از نقطهٔ $(2,1)$ و درنتیجه f از نقطهٔ $(1,2)$ عبور می‌کند.

$$f(1)=2 \Rightarrow \sqrt{m}\times\sqrt{3+m}=2 \Rightarrow m(3+m)=4 \Rightarrow m^2+3m=4$$

$$\Rightarrow m^2+3m-4=0 \xrightarrow[\text{مجموع ضرایب صفر}]{m>0} m=1 \Rightarrow f(x)=\sqrt{x}\times\sqrt{3x+1}$$

$$f(8)=\sqrt{8}\sqrt{24+1}=2\sqrt{2}\times 5=10\sqrt{2}$$

قِلِقِش رو یاد بگیر!

می‌دانیم با جابه‌جایی x و y یک نقطه روی تابع f، نقطه‌ای روی تابع f^{-1} حاصل می‌شود، یعنی:

$$\underbrace{(b,a)\in f^{-1}}_{f^{-1}(b)=a} \Leftrightarrow \underbrace{(a,b)\in f}_{f(a)=b}$$

۱۵- باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر x^2-1 برابر $2x+3$ است. باقی‌ماندهٔ تقسیم $P(3-x)-P(x-3)$ بر $x-2$ کدام است؟

۱) ۴
۲) ۳
۳) ۶
۴) ۲

پاسخ: گزینهٔ ۱ (آسان ـ محاسباتی ـ سریع ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۱۹ ـ ۱۲۰۱)

قضیهٔ **تقسیم** را می‌نویسیم:

$$P(x)=(x^2-1).g(x)+(2x+3)$$

$$\begin{cases} x=۱ \Rightarrow P(۱)=۵ \\ x=-۱ \Rightarrow P(-۱)=۱ \end{cases}$$

باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای بر $(x-۲)$، برابر با مقدار چندجمله‌ای به‌ازای $x=۲$ است: $x=۲ \Rightarrow R=P(۱)-P(-۱)=۵-۱=۴$

ماز

۱۶- اگر دامنهٔ هر دو تابع $y=f(ax)$ و $y=f(b-x)$ یکسان و برابر بازهٔ $[-۲,۴]$ باشد، مقدار $a+b$ کدام است؟ $(a>۰)$

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ ترکیبی ـ استاندارد ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۷ ـ ۱۲۰۱)

دامنهٔ $f(ax)$ برابر $[-۲,۴]$ است، پس دامنهٔ $f(x)$ برابر $[-۲a,۴a]$ است:

$$-۲ \le x \le ۴ \xrightarrow{a>۰} -۲a \le ax \le ۴a \Rightarrow D_f=[-۲a,۴a]$$

دامنهٔ $f(b-x)$ برابر $[-۲,۴]$ است، پس دامنهٔ $f(x)$ برابر $[b-۴,۲+b]$ است:

$$-۲ \le x \le ۴ \Rightarrow -۴ \le -x \le ۲ \Rightarrow b-۴ \le b-x \le b+۲ \Rightarrow D_f=[b-۴,b+۲]$$

بنابراین:

$$[-۲a,۴a]=[b-۴,۲+b]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -۲a=b-۴ \\ ۴a=۲+b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲a+b=۴ \\ ۴a-b=۲ \end{cases} \xrightarrow{+} ۶a=۶ \Rightarrow \begin{cases} a=۱ \\ b=۲ \end{cases} \Rightarrow a+b=۳$$

یه جمع‌بندی خفن از انتقال

فرض کنید برد تابع $y=f(x)$ بازهٔ $[a,b]$ باشد. $(k>۰)$

نوع تبدیل	ضابطهٔ جدید	برد جدید
k واحد انتقال عمودی به بالا	$f(x)+k$	$[a+k,b+k)$
k واحد انتقال عمودی به پایین	$f(x)-k$	$[a-k,b-k)$
انبساط عمودی	$kf(x),(k>۱)$	$[ka,kb)$
انقباض عمودی	$kf(x),(۰<k<۱)$	$[ka,kb)$
قرینه نسبت به محور x ها	$-f(x)$	$(-b,-a]$

فرض کنید دامنهٔ تابع $y=f(x)$ بازه $[a,b]$ باشد. $(k>۰)$

نوع تبدیل	ضابطهٔ جدید	دامنهٔ جدید
k واحد انتقال افقی به راست	$f(x-k)$	$[a+k,b+k)$
k واحد انتقال افقی به چپ	$f(x+k)$	$[a-k,b-k)$
انقباض افقی	$f(kx),k>۱$	$[\frac{a}{k},\frac{b}{k})$
انبساط افقی	$f(kx),۰<k<۱$	$[\frac{a}{k},\frac{b}{k})$
قرینه نسبت به محور y ها	$f(-x)$	$(-b,-a]$

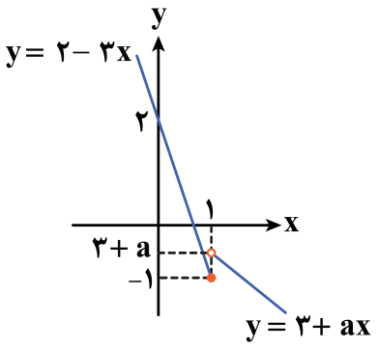
ماز

۱۷- برد تابع $f(x)=\begin{cases}۲-۳x & x\leq ۱\\ ۳+ax & x>۱\end{cases}$ برابر $\mathbb{R}$ است. حداقل مقدار صحیح a کدام است؟

۱) -۱ ۲) -۲ ۳) -۳ ۴) -۴

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ خط‌به‌خط ـ استاندارد ـ ریاضی ۱ صفحهٔ ۱۱۳ ـ ۱۰۰۵)

برای آن‌که برد تابع f برابر با $\mathbb{R}$ باشد، باید نمودار تابع f به‌صورت مقابل باشد:



$$\Rightarrow \begin{cases} ۱) a<۰ \\ ۲) ۳+a\geq -۱ \Rightarrow a\geq -۴ \end{cases} \Rightarrow -۴\leq a<۰$$

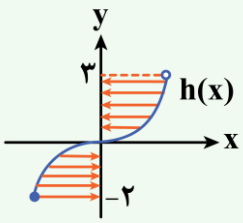
بنابراین حداقل مقدار صحیح a برابر -۴ است.

رسم نمودار توابع چندضابطه‌ای

برای رسم نمودار توابع چندضابطه‌ای، نمودار هر یک از ضابطه‌ها را **با توجه به دامنه** آن ضابطه، در یک دستگاه مختصاتی رسم می‌کنیم.

برد تابع

برای محاسبهٔ برد یک تابع **از روی نمودار** آن کافی است نمودار را روی محور yها **تصویر** کنیم.



۱۸- نقطهٔ $A(۲,m)$ از نمودار تابع $y=۲f(\frac{۱-x}{m})$ با نقطهٔ $A'(۳,n)$ از نمودار تابع $y=۱-f(\frac{x}{۳})$ متناظر است. مقدار $m+n$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۲ ۴) ۱

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ ترکیبی ـ استاندارد ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۱۰ ـ ۱۲۰۱)

مختصات نقاط را در ضابطه‌ها قرار می‌دهیم:

$$A(۲,m)\Rightarrow m=۲f(-\frac{۱}{m})\Rightarrow f(-\frac{۱}{m})=\frac{m}{۲}$$
$$A'(۳,n)\Rightarrow n=۱-f(۱)\Rightarrow f(۱)=۱-n$$

دو نقطه با هم **متناظرند**، پس:

$$\Rightarrow \begin{cases} -\frac{۱}{m}=۱\Rightarrow m=-۱ \\ \frac{m}{۲}=۱-n\Rightarrow n=\frac{۳}{۲} \end{cases} \Rightarrow m+n=\frac{۱}{۲}$$

یه نکتهٔ طلایی!

اگر توابع g و h تبدیل‌یافتهٔ تابع f باشند و A روی نمودار g با A' روی نمودار h متناظر باشند، آن‌گاه **هر دو متناظر** با نقطهٔ M روی نمودار f هستند.

$$M\in f \begin{cases} A\in g \\ A'\in h \end{cases}$$

۱۹- تابع f با دامنهٔ $[-\infty,2)$ و تابع $g(x)=3-\sqrt{1-x}$ را در نظر بگیرید. مجموع اعداد صحیح عضو دامنهٔ تابع $y=\frac{f(2-x)}{g^{-1}(x)}$ چقدر است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۵ ۴) ۳

پاسخ: گزینهٔ ۱ (سخت ـ محاسباتی ـ زمان‌بر ـ حسابان ۱ صفحهٔ ۶۴ ـ ۱۱۰۲)

دامنهٔ تابع g^{-1} برابر با برد تابع g یعنی $[-\infty,3)$ است.

وقتی دو تابع بر هم تقسیم شوند، بین دامنه‌های آن‌ها **اشتراک** می‌گیریم و **ریشه‌های مخرج** را **کم** می‌کنیم:

$$D_{\frac{f(2-x)}{g^{-1}(x)}}=D_{f(2-x)}\cap D_{g^{-1}}-\left\{x\middle|g^{-1}(x)=0\right\}$$

$$D=\left\{x\middle|(2-x)\in D_f, x\in D_{g^{-1}}, g^{-1}(x)\neq 0\right\}$$

$$=\left\{x\middle|2-x\le 2, x\le 3, x\neq g(0)\right\}=\left\{x\middle|0\le x, x\le 3, x\neq 2\right\}=[0,3]-\{2\}$$

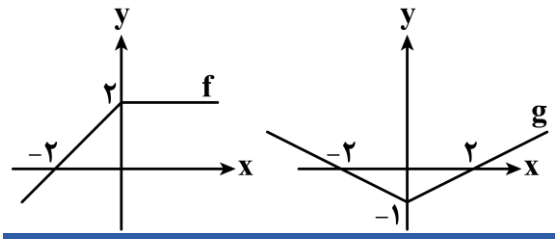
اعداد صحیح دامنه ۰، ۱ و ۳ هستند که مجموع آن‌ها برابر ۴ است.

رابطهٔ دامنه و برد تابع و وارونش

دامنهٔ f با برد f^{-1} و برد f با دامنهٔ f^{-1} برابر است.

$$D_f=R_{f^{-1}} \qquad R_f=D_{f^{-1}}$$

۲۰- نمودار توابع f و g به‌صورت زیر است. اگر تابع $(f-mg)$ در $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی باشد، حدود m کدام است؟



۱) $-2<m<2$

۲) $-1<m<1$

۳) $-1<m<0$

۴) $-2<m<0$

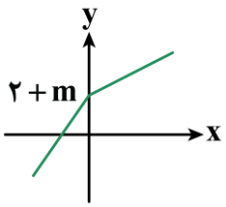
پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ زمان‌بر ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۲۲ ـ ۱۲۰۱)

ضابطهٔ f و g را می‌نویسیم:

$$f(x)=\begin{cases} x+2 & x<0 \\ 2 & x\ge 0 \end{cases} \quad \text{و} \quad g(x)=\begin{cases} -\frac{1}{2}x-1 & x<0 \\ \frac{1}{2}x-1 & x\ge 0 \end{cases}$$

$$(f-mg)(x)=\begin{cases} x+2+\frac{m}{2}x+m & x<0 \\ 2-\frac{m}{2}x+m & x\ge 0 \end{cases} \Rightarrow (f-mg)(x)=\begin{cases} (1+\frac{m}{2})x+2+m & x<0 \\ -\frac{m}{2}x+2+m & x\ge 0 \end{cases}$$

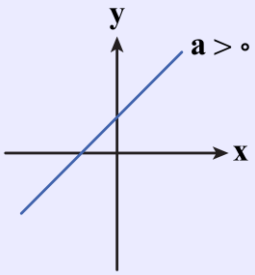
$(f - mg)$ تابعی **اکیداً صعودی** است، پس باید **شیب** هر دو ضابطه **مثبت** باشد:

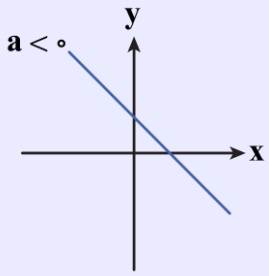


$$\begin{cases} 1+\frac{m}{2} > 0 \Rightarrow m > -2 \\ -\frac{m}{2} > 0 \Rightarrow m < 0 \end{cases} \Rightarrow -2 < m < 0$$

یکنوایی توابع خطی

در تابع خطی $f(x) = ax + b \; ; \; a \neq 0$ اگر **شیب خط مثبت** باشد تابع **صعودی اکید** و اگر **شیب خط منفی** باشد تابع **نزولی اکید** است.





ماز

سلام به مازی‌های عزیز

سرفصل **هندسهٔ** این آزمون از دو بخش تشکیل شده است:

۱- هندسه ۳: نمایش اعداد به‌صورت **ماتریسی و اعمال** بر روی آن‌ها معمولاً برای دانش‌آموزان جذابیت دارد و مخصوصاً گره زدن آن به مطالب قدیمی از جمله **حل دستگاه‌های معادلاتی**. یادگیری این بحث برای همهٔ شما عزیزان توصیه می‌شود چرا که علاوه بر اهمیت آن در کنکور و امتحان نهایی، **شروع ریاضیات دانشگاهی** هم از همین مباحث خواهد بود سهم سرفصل حاضر در کنکور و امتحان نهایی در جدول زیر آمده است:

نام فصل	تعداد تست در کنکور	بارم در امتحان نهایی
کل فصل ۱	۲ تست	۶ نمره
سرفصل حاضر	۱ تست	۲ نمره

۲- هندسه پایه: «**تشابه**» در هندسهٔ دهم فصل پرکاربردی است حالا که پایهٔ دوازدهم هستید خود به اهمیت آن کاملاً واقفید و دیده‌اید که **در مباحث فصول بعدی** و نیز **هندسهٔ پایهٔ یازدهم** همیشه **تشابه** و **تالس** همراه شماست. معمولاً در کنکور **حداقل ۱ سؤال** از این قسمت از هندسهٔ پایه مطرح می‌شود.

سرفصل **گسستهٔ** این آزمون نیز از دو بخش تشکیل شده است:

درس اول از فصل اول که استدلال‌های ریاضی است شاید خیلی به نظریهٔ اعداد ارتباطی نداشته باشد و با اغلب استدلال‌های آن در سال‌های قبل آشنا شده‌اید. سعی کنید **به تمام مثال‌ها و تمارینی که در ذیل هر استدلال در کتاب درسی** بیان شده است توجه ویژه داشته باشید و از زیر ذره‌بین نگاهتان پنهان نشوند که هر لحظه ممکن است یکی از آن‌ها مورد توجه طراحان محترم کنکور واقع شده و شما را مورد ارزیابی قرار دهد.

اما در درس دوم که قسمت «**بخش‌پذیری و عاد کردن**» در این سرفصل است، **آغاز نظریهٔ اعداد** محسوب می‌شود که معمولاً حل سؤالات آن در **امتحان نهایی به‌راحتی** صورت می‌گیرد ولی در **کنکور** می‌توانند از آن بحث سؤالات **ساده**، **متوسط** و یا **دشوار** مطرح کنند.

سهم این سرفصل در امتحانات نهایی و کنکورهای سنوات اخیر **به‌طور میانگین** به شکل زیر بوده است:

نام فصل	تعداد تست در کنکور	بارم در امتحان نهایی
کل فصل ۱	۲ تست	۷ نمره
سرفصل حاضر	۰ یا ۱ تست	۲/۵ نمره

موفق باشید.

رسول حاجی‌زاده ـ مسئول درس هندسه، گسسته و آمار آزمون‌های تستی ریاضی ماز

۲۱- اگر $A=\begin{bmatrix}1 & -3\\ 1 & -3\end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix}x+1 & -1\\ x & 0\end{bmatrix}$ و $A^2+AB+BA+B^2$ ماتریس قطری باشد، آنگاه ماتریس $A-B$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix}-1 & -2\\ 0 & -3\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}1 & -2\\ 0 & -3\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}-1 & -2\\ 2 & -3\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}1 & -2\\ 2 & -3\end{bmatrix}$

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ ترکیبی ـ زمان‌بر ـ هندسه ۳ صفحهٔ ۲۰ و ۲۱ ـ ۱۲۰۱)

اولاً برای ماتریس‌های A و B داریم:

$$A^2+AB+BA+B^2=(A+B)^2$$

پس می‌توان نوشت:

$$A+B=\begin{bmatrix}x+2 & -4\\ x+1 & -3\end{bmatrix}\Rightarrow C=(A+B)^2=\begin{bmatrix}0 & -4x+4\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

زیرا:

$$c_{12}=\begin{bmatrix}x+2 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-4\\ -3\end{bmatrix}=-4x-8+12=-4x+4$$

در ماتریس قطری درایه‌های غیرقطر اصلی **صفرند**، پس:

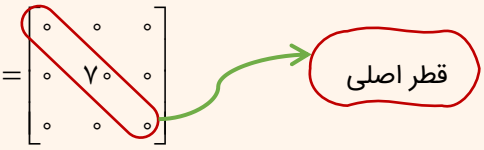
$$-4x+4=0\Rightarrow x=1$$
$$\Rightarrow A=\begin{bmatrix}1 & -3\\ 1 & -3\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\Rightarrow A-B=\begin{bmatrix}-1 & -2\\ 0 & -3\end{bmatrix}$$

ماتریس قطری

ماتریسی مربعی است که تمام **درایه‌های غیرواقع** بر **قطر اصلی** آن **صفر** باشند. (درایه‌های واقع بر قطر اصلی می‌توانند صفر باشند یا نباشند.)

دو نمونهٔ باحال ببین!

$$A=\begin{bmatrix}5000 & 0\\ 0 & -10\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 70 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$



جمع یا تفاضل دو ماتریس

برای جمع یا تفاضل دو ماتریس، در وهلهٔ اول دو ماتریس باید **هم‌مرتبه** باشند، یعنی تعداد سطرهایشان با هم و تعداد ستون‌هایشان نیز با هم برابر باشد؛ که در این صورت **هر درایه** با **درایهٔ نظیر** خود در ماتریس دیگر، **جمع یا تفریق** می‌شود.

پیدا کردن یک درایه از ضرب دو ماتریس

برای محاسبهٔ ماتریس $A\times B$ کافی است ماتریس A را به‌صورت سطری و ماتریس B را به‌صورت ستونی دسته‌بندی کنیم و هر یک از سطرهای ماتریس اول را در ستون‌های ماتریس دوم ضرب کنیم، یعنی درایهٔ سطر iام و ستون j ام ماتریس $A\times B$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\text{درایهٔ سطر } i\text{ام و ستون } j\text{ ام ماتریس } A\times B=\begin{bmatrix}\text{سطر } i\text{ام } A\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\text{ستون}\\ j\text{ ام}\\ B\end{bmatrix}$$

یه نمونهٔ باحال ببین!

اگر $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 4 & 2\end{bmatrix}$، آن‌گاه:

$$A\times B=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 1\\ 4 & 2\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ \\ ۴ \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} ۱ & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ \\ ۴ \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳-۴ & ۱-۲ \\ ۶+۴ & ۲+۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۱ & -۱ \\ ۱۰ & ۴ \end{bmatrix}$$

۲۲- اگر دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۳ & ۲ & ۱ \\ ۲ & ۳ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} x & -۲ & ۱ \\ -۲ & x & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$ خاصیت جابه‌جایی داشته باشند، x کدام است؟

۱) ۵ ۲) -۳ ۳) -۶ ۴) ۷

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ هندسه ۳ صفحهٔ ۲۱ ـ ۱۲۰۱)

$$AB=\begin{bmatrix} ۳ & ۲ & ۱ \\ ۲ & ۳ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & -۲ & ۱ \\ -۲ & x & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۳x-۳ & ۲x-۵ & ۶ \\ ۲x-۵ & ۳x-۳ & ۶ \\ x-۱ & x-۱ & ۳ \end{bmatrix}$$

$$BA=\begin{bmatrix} x & -۲ & ۱ \\ -۲ & x & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ & ۲ & ۱ \\ ۲ & ۳ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۳x-۳ & ۲x-۵ & x-۱ \\ ۲x-۵ & ۳x-۳ & x-۱ \\ ۶ & ۶ & ۳ \end{bmatrix}$$

از تساوی $AB=BA$ مقدار $x=۷$ به‌دست می‌آید.

جابه‌جایی (تعویض‌پذیری)

دو ماتریس A و B را **تعویض‌پذیر** می‌گویند اگر **ضرب** آن‌ها خاصیت **جابه‌جایی** داشته باشد یعنی: $AB=BA$.

توجه کنید که **در حالت کلی ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی ندارد.**

۲۳- اگر $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ -۳ & -۴ \end{bmatrix}$ و $AB=A^{-۱}+I$، آنگاه مجموع درایه‌های ماتریس B کدام است؟

۱) صفر ۲) -۳ ۳) ۶ ۴) -۶

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ ترکیبی ـ استاندارد ـ هندسه ۳ صفحهٔ ۲۳ ـ ۱۲۰۱)

ابتدا **وارون** ماتریس A را می‌یابیم:

$$A^{-۱}=\frac{۱}{-۸+۹}\begin{bmatrix} -۴ & -۳ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۴ & -۳ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}$$

$$AB=A^{-۱}+I \xrightarrow{A^{-۱}\times} B=(A^{-۱})^{۲}+A^{-۱}$$

توجه کنید که:

$$(A^{-۱})^{۲}=\begin{bmatrix} -۴ & -۳ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۴ & -۳ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱۶-۹ & ۱۲-۶ \\ -۱۲+۶ & -۹+۴ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۷ & ۶ \\ -۶ & -۵ \end{bmatrix}$$

$$B=(A^{-۱})^{۲}+A^{-۱}=\begin{bmatrix} ۷ & ۶ \\ -۶ & -۵ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -۴ & -۳ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۳ & ۳ \\ -۳ & -۳ \end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌های B برابر با صفر است.

دترمینان و وارون ماتریس‌های ۲×۲

$$A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\Rightarrow |A|=ad-bc$$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$$

به‌وضوح **شرط وارون‌پذیری** ماتریس این است که **دترمینان آن ناصفر** باشد.

پیدا کردن یک ماتریس مجهول از یک تساوی ماتریسی

اگر یک تساوی متشکل از **جمع** و **ضرب دو یا چند ماتریس** باشد و یکی از ماتریس‌های موجود در این تساوی را بخواهند، باید از ماتریسی که مورد سؤال است در تساوی داده شده **فاکتور** بگیریم، سپس طرفین را در **وارون ضریب** آن **از سمت مناسب** ضرب کنیم تا ماتریس مجهول به‌دست آورده شود.

یه نمونهٔ باحال ببین!

اگر بخواهیم ماتریس X را از تساوی زیر به‌دست آوریم، به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$AX=B+X \xrightarrow{\text{Xها را به یک طرف می‌بریم.}} AX-X=B \xrightarrow[\text{راست}]{\text{فاکتور از X از سمت}} (A-I)X=B \xrightarrow[|A-I|\neq 0]{\text{ضرب در } (A-I)^{-1} \text{ از سمت چپ}} X=(A-I)^{-1}B$$

۲۴- اگر A ماتریس اسکالر غیرصفر و B ماتریس مربعی باشد به‌طوری که $AB=\begin{bmatrix}۷ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۳ & ۰\\ ۰ & ۰ & -۱۰\end{bmatrix}$، آنگاه مجموع درایه‌های ماتریس B کدام است؟

۱) -۱۰ ۲) -۴ ۳) ۵ ۴) صفر

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ ترکیبی ـ سریع ـ هندسه ۳ صفحهٔ ۲۱ ـ ۱۲۰۱)

روش اول

$$A=mI \Rightarrow AB=m\,IB=\begin{bmatrix}۷ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۳ & ۰\\ ۰ & ۰ & -۱۰\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow B=\frac{1}{m}\begin{bmatrix}۷ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۳ & ۰\\ ۰ & ۰ & -۱۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{۷}{m} & ۰ & ۰\\ ۰ & \frac{۳}{m} & ۰\\ ۰ & ۰ & -\frac{۱۰}{m}\end{bmatrix} \Rightarrow \text{مجموع درایه‌ها}=\frac{۰}{m}=۰$$

روش دوم

ماتریس A **اسکالر** است، پس:

$$A=\begin{bmatrix}m & ۰ & ۰\\ ۰ & m & ۰\\ ۰ & ۰ & m\end{bmatrix}$$

$$AB=\begin{bmatrix}m & ۰ & ۰\\ ۰ & m & ۰\\ ۰ & ۰ & m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_{۱۱} & b_{۱۲} & b_{۱۳}\\ b_{۲۱} & b_{۲۲} & b_{۲۳}\\ b_{۳۱} & b_{۳۲} & b_{۳۳}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۷ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۳ & ۰\\ ۰ & ۰ & -۱۰\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} mb_{11} & mb_{12} & mb_{13} \\ mb_{21} & mb_{22} & mb_{23} \\ mb_{31} & mb_{32} & mb_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۷ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۱۰ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} b_{11} = \frac{۷}{m}, b_{12} = b_{13} = ۰ \\ b_{22} = \frac{۳}{m}, b_{21} = b_{23} = ۰ \\ b_{33} = \frac{-۱۰}{m}, b_{31} = b_{32} = ۰ \end{cases} \Rightarrow \text{جمع درایه‌های } B = \frac{۷}{m} + \frac{۳}{m} - \frac{۱۰}{m} = ۰$$

عضو بی‌اثر در ضرب ماتریس‌ها

I عضو بی‌اثر ضرب در ماتریس‌ها است. یعنی اگر A یک ماتریس مربعی باشد، آنگاه:

$$AI = IA = A$$

ماتریس اسکالر = ضریبی از ماتریس همانی

ماتریس قطری که همهٔ درایه‌های قطر اصلی با هم برابر باشند را ماتریس اسکالر می‌گویند که ضریبی از ماتریس همانی است:

$$A = \begin{bmatrix} m & ۰ & ۰ \\ ۰ & m & ۰ \\ ۰ & ۰ & m \end{bmatrix} = mI$$

ماز

۲۵- اگر $A = \begin{bmatrix} -۳ & -۴ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix}$، آنگاه وارون ماتریس $A^۲ - ۳I$ کدام است؟

۱) $۲I$ ۲) $\frac{۱}{۲}I$ ۳) $-۲I$ ۴) $-\frac{۱}{۲}I$

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ هندسه ۳ صفحهٔ ۲۳ ـ ۱۲۰۱)

ابتدا توان دوم ماتریس A را به‌دست می‌آوریم:

$$A^۲ = \begin{bmatrix} -۳ & -۴ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۳ & -۴ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۵ & ۰ \\ ۰ & ۵ \end{bmatrix} = ۵I$$

$$\Rightarrow A^۲ - ۳I = ۲I \Rightarrow (A^۲ - ۳I)^{-۱} = (۲I)^{-۱} = \frac{۱}{۲}I$$

دام تستی!

اگر به اینکه وارون ماتریس را می‌خواهیم دقت نکنید، در دام «گزینهٔ ۱» می‌افتید.

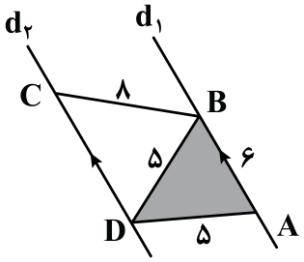
یه نکتهٔ طلایی!

اگر k یک عدد حقیقی باشد، با فرض وارون پذیری A، داریم: $(k \neq ۰, |A| \neq ۰)$

$$(kA)^{-۱} = k^{-۱} \times A^{-۱} = \frac{۱}{k}A^{-۱}$$

ماز

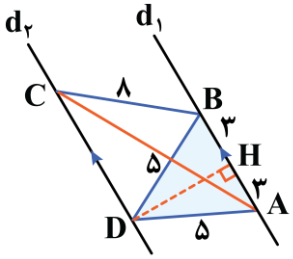
۲۶- در شکل مقابل $d_۲ \parallel d_۱$ است. طول عمودی که از A بر امتداد BC رسم می‌شود، چقدر است؟



۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

پاسخ: گزینهٔ ۲ (سخت ـ ترکیبی ـ استاندارد ـ هندسه ۱ صفحهٔ ۳۲ و ۳۳ ـ ۱۰۰۲)

چون مثلث ABD **متساوی‌الساقین** است، وقتی عمود DH را رسم می‌کنیم از **وسط** AB می‌گذرد و با توجه به رابطهٔ **فیثاغورس** در $\overset{\triangle}{AHD}$ داریم:



$$DH = \sqrt{AD^۲ - AH^۲} = ۴ \Rightarrow S_{\overset{\triangle}{ABD}} = \frac{۱}{۲} DH . AB = \frac{۱}{۲} \times ۴ \times ۶ = ۱۲$$

از آن‌جا که دو مثلث ABC و ABD **هم‌قاعده** و **هم‌ارتفاع** هستند، پس **هم‌مساحت** نیز می‌باشند:

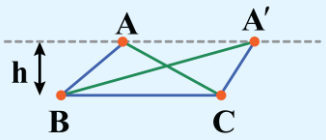
$$d_۱ \parallel d_۲ \Rightarrow S_{\overset{\triangle}{ABC}} = S_{\overset{\triangle}{ABD}} = ۱۲$$

حال عمودی که از A بر BC رسم می‌شود را AA' می‌نامیم:

$$S_{\overset{\triangle}{ABC}} = \frac{AA' . BC}{۲} = ۱۲ \Rightarrow AA' \times ۸ = ۲۴ \Rightarrow AA' = ۳$$

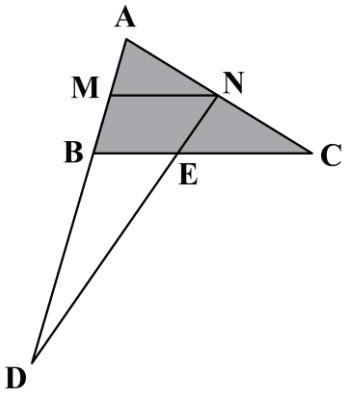
دو مثلث هم‌قاعده و هم‌ارتفاع

اگر دو مثلث **دارای قاعدهٔ مشترک** باشند و **رأس سوم** آن‌ها روی خطی **موازی** با **قاعده** باشد، آنگاه **مساحت** دو مثلث با هم **برابر** است.



$$AA' \parallel BC \Rightarrow S_{\overset{\triangle}{ABC}} = S_{\overset{\triangle}{A'BC}} = \frac{۱}{۲} h \times BC$$

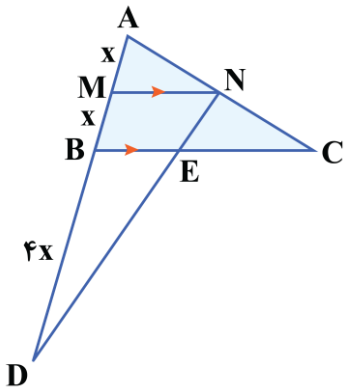
۲۷- در شکل مقابل ضلع AB را به اندازهٔ دو برابر خودش امتداد داده‌ایم تا به D برسیم و از M (وسط AB) پاره‌خط MN را موازی با BC رسم می‌کنیم. اگر E محل تلاقی DN و BC باشد، نسبت $\frac{BE}{EC}$ کدام است؟



۱) $\frac{۱}{۲}$
۲) $\frac{۳}{۵}$
۳) $\frac{۲}{۵}$
۴) $\frac{۲}{۳}$

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ سریع ـ هندسه ۱ صفحهٔ ۳۶ ـ ۱۰۰۲)

از **تعمیم قضیهٔ تالس** در $\overset{\triangle}{DMN}$ و $\overset{\triangle}{ABC}$ استفاده می‌کنیم:



$$\overset{\triangle}{DMN}: BE \parallel MN \Rightarrow \frac{BE}{MN} = \frac{BD}{DM} = \frac{۴}{۵} \Rightarrow BE = \frac{۴}{۵}MN \quad (۱)$$

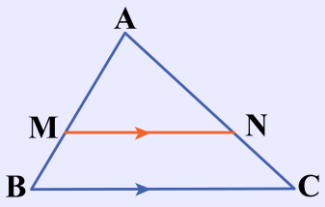
$$\overset{\triangle}{ABC}: MN \parallel BC \Rightarrow \frac{MN}{BC} = \frac{AM}{AB} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow MN = \frac{۱}{۲}BC \quad (۲)$$

$$(۱),(۲) \Rightarrow BE = \frac{۴}{۵}(\frac{۱}{۲}BC) = \frac{۲}{۵}BC$$

$$\Rightarrow \frac{BE}{BC} = \frac{۲}{۵} \xrightarrow{\text{تفضیل در مخرج}} \frac{BE}{BC - BE} = \frac{۲}{۵-۲} \Rightarrow \frac{BE}{EC} = \frac{۲}{۳}$$

قضیهٔ تالس در مثلث

مطابق شکل، اگر پاره‌خط MN با BC موازی باشد، داریم:



$$MN \parallel BC \Rightarrow \begin{cases} \frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} & \text{جزء به جزء} \\ \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} & \text{جزء به کل(تعمیم تالس)} \end{cases}$$

نسبت، تناسب و ویژگی‌ها

حاصل تقسیم دو کمیت **هم‌جنس** (هم‌واحد) را نسبت آن دو کمیت می‌گوییم. مثل $\frac{x}{y}$ $(y \neq ۰)$

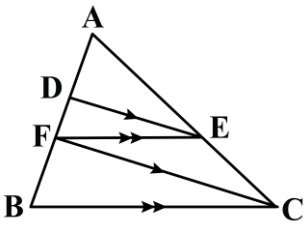
در هیچ نسبتی **مخرج صفر نمی‌شود**. همچنین نسبت، کمیتی **بدون واحد** است.

تساوی بین دو نسبت را تناسب می‌گوییم، مانند $\frac{x}{y} = \frac{z}{w}$. چه کارهایی می‌توانیم در تناسب انجام دهیم؟

طرفین وسطین	$xw = zy$
جابه‌جایی صورت یک کسر با مخرج کسر مقابل	$\frac{x}{z} = \frac{y}{w}\ ,\ \frac{w}{y} = \frac{z}{x}$
معکوس کردن طرفین تناسب	$\frac{y}{x} = \frac{w}{z}$
ترکیب در صورت یا مخرج	$\frac{x+y}{y} = \frac{z+w}{w}\ ,\ \frac{x}{x+y} = \frac{z}{z+w}$
تفضیل در صورت یا مخرج	$\frac{x-y}{y} = \frac{z-w}{w}\ ,\ \frac{x}{y-x} = \frac{z}{w-z}$
ترکیب و تفضیل هم‌زمان	$\frac{x+y}{x-y} = \frac{z+w}{z-w}\ ,\ \frac{x-y}{x+y} = \frac{z-w}{z+w}$
جمع صورت‌ها با هم در صورت و جمع مخرج‌ها با هم در مخرج	$\frac{x}{y} = \frac{z}{w} = \frac{x+z}{y+w} = \frac{ax+bz}{ay+bw}\ (a,b \in \mathbb{R})$ به شرطی که مخرج‌ها صفر نشوند.

ماز

۲۸- در شکل مقابل $DE \parallel CF$ ، $EF \parallel BC$ و $۳DE = ۲FC$ است. اگر $AD = ۴$ طول BF کدام است؟



۱) ۶

۲) ۳

۳) ۴

۴) ۵

پاسخ: گزینهٔ ۲ (آسان ـ خط‌به‌خط ـ سریع ـ هندسه ۱ صفحهٔ ۳۷ ـ ۱۰۰۲)

ابتدا نسبت DE به FC را استخراج می‌کنیم:

$$۳DE = ۲FC \Rightarrow \frac{DE}{FC} = \frac{۲}{۳}$$

به کمک **تعمیم قضیهٔ تالس** داریم:

$$\overset{\triangle}{AFC}: \frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AF} = \frac{DE}{FC} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow \begin{cases} \frac{AE}{AC} = \frac{۲}{۳} \\ AF = \frac{۳}{۲}AD = \frac{۳}{۲} \times ۴ = ۶ \end{cases}$$

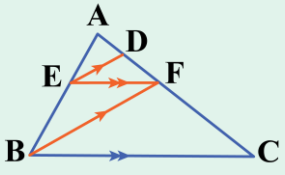
$$\overset{\triangle}{ABC}: \frac{AF}{AB} = \frac{FE}{BC} = \frac{AE}{AC} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow AB = \frac{۳}{۲}AF = \frac{۳}{۲} \times ۶ = ۹$$

بنابراین:

$$BF = AB - AF = ۹ - ۶ = ۳$$

قِلِقِش رو یاد بگیر! (تالس دوبل!)

در شکل زیر، ED و BF موازی و همچنین EF و BC موازی می‌باشند، بنابراین:



$$\left.\begin{array}{l} \overset{\triangle}{ABF}: ED \parallel BF \Rightarrow \frac{AE}{EB} = \frac{AD}{DF} \\ \overset{\triangle}{ABC}: EF \parallel BC \Rightarrow \frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FC} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{AD}{DF} = \frac{AF}{FC}$$

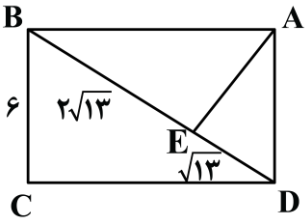
همچنین:

$$\left.\begin{array}{l}\overset{\triangle}{ABF}: ED \parallel BF \Rightarrow \dfrac{AE}{AB}=\dfrac{AD}{AF}\\ \overset{\triangle}{ABC}: EF \parallel BC \Rightarrow \dfrac{AE}{AB}=\dfrac{AF}{AC}\end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{AD}{AF}=\dfrac{AF}{AC} \Rightarrow AF^{۲}=AD\times AC$$

نتیجهٔ مهم آن را به خاطر بسپارید:

$$AF^{۲}=AD\times AC$$

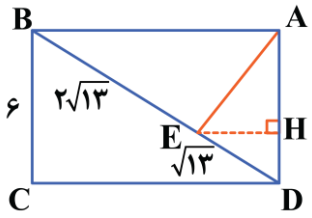
۲۹- در مستطیل شکل مقابل طول AE کدام است؟



۱) ۷
۲) ۶
۳) ۵
۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ هندسه ۱ صفحهٔ ۳۵ ـ ۱۰۰۲)

طبق قضیهٔ **فیثاغورس** در مثلث BCD:



$$CD=\sqrt{BD^{۲}-BC^{۲}}=\sqrt{۱۱۷-۳۶}=۹ \Rightarrow AB=CD=۹$$

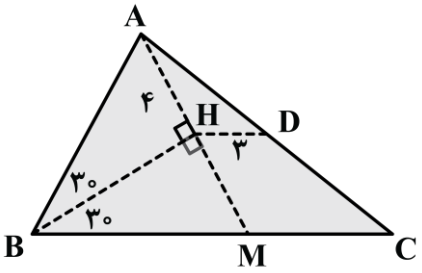
عمود EH را رسم می‌کنیم:

$$\overset{\triangle}{ABD}\ \text{تعمیم تالس در}\ AB \parallel EH: \dfrac{EH}{AB}=\dfrac{HD}{AD}=\dfrac{DE}{BD}=\dfrac{۱}{۳} \Rightarrow \begin{cases} EH=\dfrac{۱}{۳}AB=\dfrac{۱}{۳}\times ۹=۳\\ HD=\dfrac{۱}{۳}AD=\dfrac{۱}{۳}\times ۶=۲\end{cases}$$

بنابراین در مثلث **قائم‌الزاویهٔ** AEH داریم:

$$\begin{cases} AH=AD-DH=۴\\ EH=۳\end{cases} \xrightarrow{\text{فیثاغورس}} AE=\sqrt{۴^{۲}+۳^{۲}}=\sqrt{۲۵}=۵$$

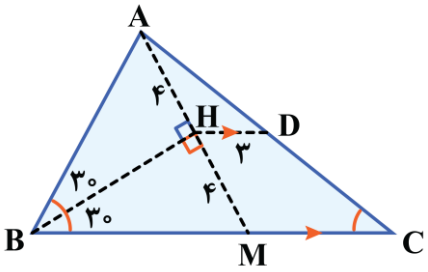
۳۰- در شکل مقابل عمود AH را بر نیمساز زاویهٔ B رسم کرده‌ایم و HD موازی با BC رسم شده است. با توجه به اندازه‌های داده‌شده، محیط مثلث ABC در کدام نابرابری صدق می‌کند؟



۱) ۳۰ < محیط
۲) ۳۶ < محیط < ۳۰
۳) ۳۸ < محیط < ۳۶
۴) محیط < ۳۸

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ ترکیبی ـ استاندارد ـ هندسه ۱ صفحهٔ ۳۵ ـ ۱۰۰۲)

در مثلث ABM **ارتفاع** و **نیمساز** بر هم **منطبق‌اند**. پس این مثلث **متساوی‌الساقین** است. از طرفی مثلث متساوی‌الساقین ABM دارای زاویهٔ ۶۰° است، در نتیجه **متساوی‌الاضلاع** است و H وسط AM قرار دارد:



$$AM = AB = BM = ۲AH = ۸$$

مقدار AD را x در نظر می‌گیریم:

$$\overset{\triangle}{AMC}\text{ تالس در }: \frac{AH}{AM} = \frac{AD}{AC} = \frac{HD}{MC} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \begin{cases} AC = ۲AD = ۲x \\ MC = ۲HD = ۶ \end{cases}$$

$$\Rightarrow BC = BM + MC = ۸ + ۶ = ۱۴$$

$$\Rightarrow \overset{\triangle}{ABC}\text{ محیط} = AB + AC + BC = ۸ + ۲x + ۱۴ = ۲۲ + ۲x$$

ولی در مثلث AHD، x در نابرابری $۴ < x < ۷$ صدق می‌کند، بنابراین $۸ < ۲x < ۱۴$ و $۳۰ < \text{محیط} < ۳۶$.

سخن طراح

در فصل آخر هندسه ۲ طریقهٔ پیدا کردن دقیق x را یاد خواهید گرفت.

یه نکتهٔ طلایی!

یادتون نره که **در مثلث قائم الزاویه‌ای** که یک زاویهٔ ۳۰° یا ۶۰° داشته باشه می‌تونیم از دو مورد زیر استفاده کنیم:

۱) سینوس زاویهٔ ۳۰° برابر با $\frac{۱}{۲}$ هست. یعنی ضلع روبه‌رو به زاویهٔ ۳۰° نصف وتر می‌شه.

۲) سینوس زاویهٔ ۶۰° برابر با $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ هست. یعنی ضلع روبه‌رو به زاویهٔ ۶۰° برابر با $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ وتر می‌شه.

قِلِقِشو یاد بگیر!

خیلی وقتا برای حل سؤالات هندسه از سینوس و کسینوس زاویهٔ ۳۰° و ۶۰° هم استفاده می‌کنیم. فقط کافیه کمی دقت کنی که چه موقع به دردت می‌خوره! 😉

ماز

۳۱- عدد m برابر با حاصل‌ضرب دو عدد طبیعی است که با یکدیگر ۳ واحد اختلاف دارند. اگر $۴m+n$ همواره مربع کامل باشد، آنگاه n کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۱۶ ۳) ۴ ۴) ۱

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ گسسته صفحهٔ ۳ ـ ۱۲۰۱)

روش اول

دو عدد طبیعی با اختلاف ۳ واحد را x و $x+۳$ در نظر می‌گیریم و داریم:

$$m = x(x+۳)$$

$$\Rightarrow ۴m + n = ۴x(x+۳) + n \Rightarrow ۴x^۲ + ۱۲x + n$$

عبارت $۴x^۲+۱۲x+n$ به ازای $n=۹$ به صورت زیر به **مربع کامل** تبدیل می‌شود:

$$۴x^۲+۱۲x+۹=(۲x)^۲+۲\times۳(۲x)+۳^۲=(۲x+۳)^۲$$

روش دوم

می‌توانید دو عدد داده شده را مثلاً ۲ و ۵ در نظر گرفته و بدانید که قرار است $n+۴\times۱۰$ یعنی $n+۴۰$ مربع کامل باشد که n باید ۹ باشد.

قِلِقِش رو یاد بگیر!

هر وقت صحبت از دو عدد باشد که **k واحد اختلاف** دارند آن‌ها را به صورت x و $x+k$ در نظر می‌گیریم. به طور مثال دو عدد متوالی را به صورت x و $x+۱$ در نظر می‌گیریم.

۳۲- اگر $x>۰$، آنگاه بیشترین مقدار ممکن برای عبارت $(\frac{۱}{x}+۲)(x+۲)$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

پاسخ: گزینهٔ ۴ (آسان ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ گسسته صفحهٔ ۷ ـ ۱۲۰۱)

می‌دانیم اگر $x>۰$، آن‌گاه $x+\frac{۱}{x}\geq ۲$، پس:

$$(x+۲)(\frac{۱}{x}+۲)=۱+۲x+\frac{۲}{x}+۴=۵+۲(x+\frac{۱}{x})$$

$$\Rightarrow ۵+۲(x+\frac{۱}{x})\leq ۵+۲(-۲)\Rightarrow ۵+۲(x+\frac{۱}{x})\leq ۱$$

همیشه یادت باشه!

- اگر $x>۰$ باشد:

$$x+\frac{۱}{x}\geq ۲$$

- اگر $x<۰$ باشد:

$$x+\frac{۱}{x}\leq -۲$$

۳۳- اگر a و b دو عدد صحیح باشند که $a-b$ فرد است، آنگاه کدام گزینه الزاماً درست است؟

۱) $a^۲+b^۲+۱$ عددی فرد است.
۲) $ab+۱$ عددی زوج است.
۳) $۲a-b$ عددی فرد است.
۴) $(a+۱)(b+۱)$ عددی زوج است.

پاسخ: گزینهٔ ۴ (آسان ـ مفهومی ـ استاندارد ـ گسسته صفحهٔ ۴ ـ ۱۲۰۱)

چون اختلاف دو عدد صحیح یعنی عبارت $(a-b)$ فرد شده است، حتما **یکی زوج** و **یکی فرد** بوده است. بنابراین از بین $a+۱$ و $b+۱$ نیز یکی **زوج** و یکی **فرد** است و $(a+۱)(b+۱)$ عددی **زوج** است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) از بین $a^۲$ و $b^۲$ یکی زوج و دیگری فرد است، پس $a^۲+b^۲$ فرد و $a^۲+b^۲+۱$ عددی **زوج** است.

۲) از بین a و b یکی زوج و دیگری فرد است، پس (ab) زوج است و $(ab)+۱$ عددی **فرد** است.

۳) اگر a فرد و b زوج باشد، $۲a$ و b زوج‌اند و $(۲a-b)$ عددی **زوج** است.

توان nام زوج یا فرد؟!

اگر a عددی صحیح و n عددی طبیعی باشد، می‌توان گفت:

a^n عددی زوج است $\Leftrightarrow$ a عددی زوج است.

a^n عددی فرد است $\Leftrightarrow$ a عددی فرد است.

۳۴- اگر a، b و c سه عدد صحیح و x، y و z همان اعداد با ترتیب دیگری باشند، چه تعداد از گزاره‌های زیر درست است؟

الف: عبارت $(a+x)(b+x)(c+x)$ می‌تواند فرد باشد.

ب: عبارت $(x-c)(y-b)(z-a)$ همواره برابر صفر است.

ج: عبارت $abc+xyz$ همواره زوج است.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ مفهومی ـ زمان‌بر ـ گسسته صفحهٔ ۶ ـ ۱۲۰۱)

بررسی موارد:

الف) نادرست است، چون یکی از پرانتزها برابر $2x$ (زوج) و کل عبارت زوج است.

ب) نادرست است. مثال نقض $x=1, y=3, z=4$ و $a=3, b=1, c=4$، پس:

$$(x-c)(y-b)(z-a)=(-3)(+2)(1)=-6$$

ج) درست است، زیرا $abc=xyz$، پس $abc+xyz=2xyz$ همواره زوج است.

بنابراین تنها یک مورد از گزاره‌های بالا درست است.

مثال نقض

اگر یک گزاره همواره درست نباشد یعنی **همیشه صادق نیست** و مواردی وجود دارد که درستی آن **نقض** می‌شود. در این مواقع برای اثبات **نادرستی** گزاره در حالت کلی، از **مثال نقض** استفاده می‌کنیم.

زوج یا فرد؟!

۱) اگر حاصل‌ضرب چند عدد، **فرد** باشد، همهٔ آن‌ها **فرد** هستند.

۲) اگر حاصل‌ضرب چند عدد، **زوج** باشد، حتما **حداقل یکی** از آن‌ها **زوج** است.

۳) اگر **مجموع** یا **تفاضل** دو عدد، فرد باشد، حتماً **یکی از آن‌ها فرد** و **دیگری زوج** است.

۴) **توان** روی زوج یا فرد بودن اعداد **تأثیری ندارد**.

۳۵- در مورد ارزش گزاره‌های سوری زیر کدام گزینه درست است؟

الف: $\forall x\in\mathbb{Z}\ \exists y\in\mathbb{Z}: \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{x+y}$

ب: $\exists x\in\mathbb{Z}\ \forall y\in\mathbb{Z}: x^2+y^2=(x-y)^2$

۱) هر دو درست هستند.

۲) هر دو نادرست هستند.

۳) «الف» درست و «ب» نادرست است.

۴) «الف» نادرست و «ب» درست است.

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ خط‌به‌خط/ترکیبی ـ استاندارد ـ گسسته صفحهٔ ۸ ـ ۱۲۰۱)

بررسی موارد:

الف) نادرست است؛ زیرا در رابطهٔ $\frac{۱}{x}+\frac{۱}{y}=\frac{۱}{x+y}$ **هیچ** عدد صحیحی صدق نمی‌کند.

به طور مثال، به ازای $x=۱$، هیچ yای نمی‌توان یافت که: $۱+\frac{۱}{y}=\frac{۱}{۱+y}$

ب) درست است؛ زیرا اگر $x=۰$ باشد، به ازای هر عدد y، $y^۲=(-y)^۲$ که رابطهٔ حاصل رابطه‌ای همواره صحیح است.

سورها

۱) سور عمومی:

به ازای هر $x\in A$، $p(x)$ برقرار است. $\xrightarrow{\text{ترجمه}}$ $\forall x\in A\ ;\ p(x)$

۲) سور وجودی:

xای عضو A وجود دارد که به ازای آن $p(x)$ برقرار است. $\xrightarrow{\text{ترجمه}}$ $\exists x\in A;\ p(x)$

ماز

۳۶- اگر a و b اعداد صحیح غیرصفر باشند که $a=۵b^۲$، آنگاه کدام گزاره لزوماً درست نیست؟

۱) $a\mid ۵b^۲$ ۲) $b\mid a$ ۳) $۵\mid a$ ۴) $a\mid b^۲$

پاسخ: گزینهٔ ۴ (آسان ـ خط‌به‌خط ـ استاندارد ـ گسسته صفحهٔ ۱۰ ـ ۱۲۰۱)

از تساوی $a=۵b^۲$ نتیجه می‌شود که $a>b^۲$ پس $a\mid b^۲$ نمی‌تواند نتیجه شود.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) اثبات درستی:

$$a=۵b^۲\ \Big|\ ۵b^۲\Rightarrow a\ \Big|\ ۵b^۲$$

۲) اثبات درستی:

$$a=۵b^۲\Rightarrow b^۲\mid a\xrightarrow[\text{تعدی}]{b\mid b^۲} b\mid a$$

۳) اثبات درستی:

$$a=۵b^۲\Rightarrow ۵\mid a$$

بخش‌پذیری

می‌گوییم عدد صحیح b بر عدد صحیح و غیرصفر a بخش‌پذیر است یا a عدد b را می‌شمارد (عاد می‌کند) و می‌نویسیم $a\mid b$ اگر عدد صحیح k وجود داشته باشد به‌طوری‌که:

$$b=ak$$

ویژگی‌های بخش‌پذیری

۱) $1|a\ ,\ a|0\ ,\ a|a$

۲) $a|b\ ,\ b|c \Rightarrow a|c$ (تعدی)

۳) $a|b\ ,\ a|c \Rightarrow a|mb+nc$ (a هر ترکیب خطی از b و c را می‌شمارد)

۴) $a|b \Rightarrow a|b^n\ ,\ a|mb\ ,\ a^n|b^n\ (n\in\mathbb{N})$

۵) $a|b, b\neq 0 \Rightarrow |a|\leq|b|$

۶) $a|b\ ,\ c|d \Rightarrow ac|bd$

ماز

۳۷- a، b و c اعداد صحیح و مخالف صفر هستند. کدام گزینه ارزش گزاره‌های زیر را به درستی نشان می‌دهد؟

الف: $a|bc \Rightarrow a|b \vee a|c$

ب: $a|b+c \Rightarrow a|b \wedge a|c$

۱) فقط «الف» درست است.
۲) فقط «الف» نادرست است.
۳) هر دو درست هستند.
۴) هر دو نادرست هستند.

پاسخ: گزینهٔ ۴ (آسان ـ خط‌به‌خط ـ سریع ـ گسسته صفحه ۱۱ و ۱۲ ـ ۱۲۰۱)

هر دو نادرست هستند.

بررسی موارد:

الف) $a|bc \Rightarrow a|b \vee a|c$ با مثال $a=6, b=4$ و $c=3$ نقض می‌شود.

ب) $a|b+c \Rightarrow a|b \wedge a|c$ با مثال $a=4, b=3$ و $c=5$ نقض می‌شود.

ماز

۳۸- اگر n عددی صحیح باشد که $n+1|3n^2-16n+6$، آنگاه کدام گزینه در مورد بزرگ‌ترین مقدار n درست نیست؟

۱) دو رقمی است.
۲) مربع کامل است.
۳) مضرب ۳ است.
۴) زوج است.

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ گسسته صفحهٔ ۱۲ ـ ۱۲۰۱)

روش اول

می‌دانیم که **هر عدد خودش را عاد می‌کند**، همچنین طبق **ویژگی‌های عاد کردن** داریم:

$$\left.\begin{array}{l} n+1|3n^2-16n+6 \\ n+1|(n+1)(3n)=3n^2+3n \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} n+1|-19n+6 \\ n+1|(n+1)\times 19 \end{array}\right\} \Rightarrow n+1|25$$

بنابراین بزرگ‌ترین مقدار n به‌ازای $n+1=25$ به دست می‌آید:

$$n+1=25 \Rightarrow \max(n)=24$$

عدد ۲۴ فقط مربع کامل نیست.

روش دوم جایگذاری ریشهٔ سمت چپ در سمت راست:

$$n+1\,|\,3(-1)^2-16(-1)+6 \Rightarrow n+1|25$$

با توجه به اینکه **مقسوم‌علیه‌های** ۲۵ برابر با $\pm1, \pm5, \pm25$ هستند، بزرگ‌ترین آن‌ها ۲۵ بوده و بزرگ‌ترین مقدار n برابر است با:

$$\Rightarrow n+1=25 \Rightarrow \max(n)=24$$

ماز

۳۹- اگر $a|5n+4$ و $a|7n-1$ آنگاه چند عدد اول می‌توانند به جای a قرار گیرند؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

پاسخ: گزینهٔ ۳ (آسان ـ خط‌به‌خط ـ استاندارد ـ گسسته صفحهٔ ۱۲ ـ ۱۲۰۱)

$$\begin{cases} a|5n+4 \xrightarrow{\times 7\ \text{چاق}} a|35n+28 \\ a|7n-1 \xrightarrow{\times 5\ \text{چاق}} a|35n-5 \end{cases} \xrightarrow{\text{چاق‌ها را از هم کم می‌کنیم}} a|33 \xrightarrow{a\ \text{عدد اول}} a=3, a=11 \Rightarrow \text{۲ مقدار}$$

کلاس درس بخش‌پذیری!

در هر بخش‌پذیری همواره می‌توان طرف چاق را چاق‌تر و طرف لاغر را لاغرتر کرد.

$$\downarrow a|b \uparrow$$

لاغر — چاق

عواملی که موجب چاقی می‌شوند، **افزایش توان**، **ضریب گرفتن** و **ک.م.م** گرفتن است، یعنی:

$$a|b \Rightarrow \begin{cases} a|b^n \quad (n\in\mathbb{N}) \\ a|mb \\ a|[b,c] \end{cases}$$

و عواملی که باعث لاغری می‌شوند، **کم شدن توان**، **از دست دادن ضریب** و **ب.م.م** است:

$$a^n|b \Rightarrow a|b \quad (n\in\mathbb{N})$$
$$ma|b \Rightarrow a|b$$
$$a|b \Rightarrow (a,c)|b$$

۴۰- از رابطهٔ $7|5n+3, n\in\mathbb{Z}$ کدام گزینه نتیجه می‌شود؟

۱) $49|25n^2+5n+30$ ۲) $49|n^2-3n-10$

۳) $49|25n^2+30n-13$ ۴) $49|n^2+60n+39$

پاسخ: گزینهٔ ۲ (سخت ـ محاسباتی ـ زمان‌بر ـ گسسته صفحهٔ ۱۱ ـ ۱۲۰۱)

روش اول

سعی می‌کنیم **علاوه بر فرض** مسئله **یک رابطهٔ عادکردن صحیح دیگر** نیز بسازیم:

$$7|5n+3 \Rightarrow \begin{cases} 7^2|(5n+3)^2 \Rightarrow 49|25n^2+30n+9 \Rightarrow 49|50n^2+60n+18 \ (1) \\ 7\times 7|7(5n+3) \Rightarrow 49|35n+21 \ (2) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} 49|50n^2+95n+39$$

$$\Rightarrow 49|50n^2-49n^2+95n-49(2n)+39-49$$

$$\Rightarrow 49|n^2-3n-10$$

بررسی سایر گزینه‌ها:

(۱) نادرست است:

$$\begin{cases}۴۹\mid ۲۵n^۲+۳۰n+۹\\ ۴۹\mid ۳۵n+۲۱\end{cases}\Rightarrow ۴۹\mid ۲۵n^۲+۶۵n+۳۰\Rightarrow ۴۹\mid ۲۵n^۲+۴۹n+۱۶n+۳۰\Rightarrow ۴۹\mid ۲۵n^۲+۱۶n+۳۰$$

(۳) نادرست است:

$$۴۹\mid ۲۵n^۲+۳۰n+۹\Rightarrow ۴۹\mid ۲۵n^۲+۳۰n+۴۹-۴۰\Rightarrow ۴۹\mid ۲۵n^۲+۳۰n-۴۰$$

(۴) نادرست است:

$$۴۹\mid ۵۰n^۲+۶۰n+۱۸\Rightarrow ۴۹\mid n^۲+۶۰n+۱۸$$

روش دوم

با **عددگذاری** می‌توانیم گزینهٔ درست را بیابیم. مثلا عدد -۲ که **در فرض صدق می‌کند** را در گزینه‌ها امتحان می‌کنیم:

$$۷\mid ۵n+۳\xrightarrow{n=-۲}۷\mid -۷\ \checkmark$$

(۱)

$$۴۹\mid ۲۵n^۲+۵n+۳۰\xrightarrow{n=-۲}۴۹\mid ۱۰۰-۱۰+۳۰\Rightarrow ۴۹\not\mid ۱۲۰$$

(۲)

$$۴۹\mid n^۲-۳n-۱۰\xrightarrow{n=-۲}۴۹\mid ۴+۶-۱۰\Rightarrow ۴۹\mid ۰\ \checkmark$$

(۳)

$$۴۹\mid ۲۵n^۲+۳۰n-۱۳\xrightarrow{n=-۲}۴۹\mid ۱۰۰-۶۰-۱۳\Rightarrow ۴۹\not\mid ۲۷$$

(۴)

$$۴۹\mid n^۲+۶۰n+۳۹\xrightarrow{n=-۲}۴۹\mid ۴-۱۲۰+۳۹\Rightarrow ۴۹\not\mid -۷۷$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

بودجه‌بندی این آزمون

فیزیک ۱: ویژگی‌های فیزیکی مواد - صفحه‌های ۲۳ تا ۵۲
فیزیک ۳: حرکت بر خط راست (تا قبل از حرکت با شتاب ثابت) - صفحه‌های ۱ تا ۱۵

سهم در کنکور

پایهٔ دهم: درمجموع ۲ تست از ۳۵ تست کنکور را پوشش داده است.
پایهٔ دوازدهم: درمجموع ۱ یا ۲ تست از ۳۵ تست کنکور را پوشش داده است.

سلام به مازی‌های عزیز

خیلی سریع قبل از دیدن پاسخ‌نامه، چندتا نکتهٔ مهم رو راجع به آزمون باهم بررسی کنیم:

۱- فصل «حرکت‌شناسی» از فصل‌های پرحجم و مهم کنکوره که اهمیتش رو در جدول زیر می‌بینید:

نام فصل	تعداد تست در کنکور	بارم در امتحان نهایی
حرکت‌شناسی	۴	۳/۷۵

قسمت پایهٔ دوازدهم این آزمون مربوط به صفحه‌های ۱ تا ۱۵ کتاب درسیه که شامل مفاهیم حرکت و حرکت با سرعت ثابت می‌شه. از این قسمت‌ها معمولاً ۱ یا ۲ تست در کنکور مطرح می‌شه و بین ۱/۵ تا ۲/۵ نمره از امتحان نهایی هم از بودجه‌بندی این آزمون میاد.

۲- قسمت مربوط به پایهٔ دهم این آزمون مربوط به فصل «فشار و ویژگی‌های ماده» هست که تعداد تست اون در کنکور مطابق جدول زیره:

نام فصل	تعداد تست در کنکور تجربی	تعداد تست در کنکور ریاضی
فشار و ویژگی‌های ماده	۱ یا ۲	۲

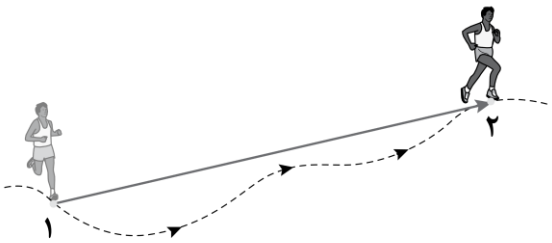
مهم‌ترین قسمت‌های فصل فشار، مباحث مربوط به «لوله‌های لاشکل»، «مانومترها» و «فشارسنج هوا» است که در این آزمون تلاش کردیم با چهار سؤال خوب به اونا بپردازیم.

موفق باشید.

سعید احمدی و سجاد صادقی‌زاده (رتبهٔ ۱ کنکور ۱۳۹۲) - مسئولین درس آزمون‌های تستی فیزیک ماز

۴۱- در شکل زیر، دونده‌ای در مسیر نشان‌داده‌شده از مکان (۱) به (۲) می‌رود. چه تعداد از عبارت‌های زیر درست بیان شده‌اند؟

الف: حرکت متحرک الزاماً شتاب‌دار است.
ب: مسافت طی‌شده الزاماً بزرگ‌تر از اندازهٔ جابه‌جایی است.
ج: ممکن است حرکت متحرک با تندی ثابت انجام گرفته باشد.
د: با تغییر مبدأ مکان، اندازهٔ بردار جابه‌جایی دونده تغییر می‌کند.



۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ مفهومی ـ سریع ـ صفحهٔ ۱۰ ـ ۱۲۰۱)

با توجه به این‌که مسیر حرکت متحرک غیرمستقیم است، هر یک از عبارات را بررسی می‌کنیم.

بررسی موارد:

الف) حرکت الزاماً شتاب‌دار است، زیرا جهت حرکت تغییر کرده است. (✓)

ب) مسافت بزرگ‌تر از اندازهٔ بردار جابه‌جایی است، زیرا حرکت بر روی خط راست انجام نشده است. (✓)

ج) حرکت می‌تواند با تندی ثابت انجام گیرد. (✓)

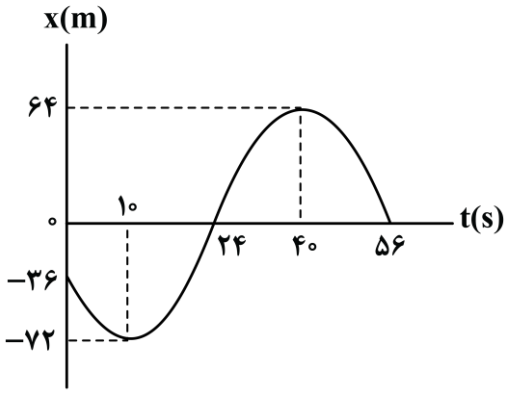
د) به‌طور کلی بردار جابه‌جایی به انتخاب مبدأ مکان **بستگی ندارد**. (✱)

نکته

۱- هرگاه متحرکی در مسیر حرکتش تغییر جهت داشته باشد، حرکت قطعاً شتاب‌دار بوده و مسافت طی‌شده بزرگ‌تر از اندازهٔ جابه‌جایی است.

۲- بردار جابه‌جایی برخلاف بردار مکان به مبدأ مکان بستگی ندارد و با تغییر مبدأ مکان، بردار جابه‌جایی تغییر نمی‌کند.

۴۲- نمودار مکان ـ زمان متحرکی که بر روی محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل است. تندی متوسط در بازهٔ زمانی که بردار مکان متحرک در جهت محور x است، چند برابر تندی متوسط در بازهٔ زمانی است که بردار مکان متحرک در خلاف جهت محور x است؟



۱) $\frac{۴}{۹}$

۲) $\frac{۹}{۴}$

۳) $\frac{۸}{۹}$

۴) $\frac{۹}{۸}$

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۱۰ ـ ۱۲۰۱)

در بازهٔ $۲۴s < t < ۵۶s$، بردار مکان در جهت محور x است. در این بازه، متحرک ابتدا ۶۴m در جهت محور حرکت می‌کند و سپس ۶۴m برمی‌گردد.

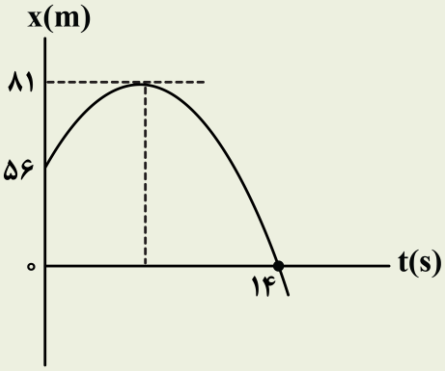
$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} = \frac{۶۴+۶۴}{۵۶-۲۴} = \frac{۱۲۸}{۳۲} = ۴\frac{m}{s}$$

در بازهٔ $۰ < t < ۲۴s$، بردار مکان در خلاف جهت محور x است. در این بازه، متحرک ابتدا ۳۶m در خلاف جهت محور حرکت می‌کند و سپس ۷۲m در جهت محور جابه‌جا می‌شود.

$$s'_{av} = \frac{\ell'}{\Delta t'} = \frac{۳۶+۷۲}{۲۴-۰} = \frac{۱۰۸}{۲۴} = \frac{۹}{۲}\frac{m}{s} \Rightarrow \frac{s_{av}}{s'_{av}} = \frac{۴}{\frac{۹}{۲}} = \frac{۸}{۹}$$

آزمون سراسری تجربی ۱۴۰۵

۴۸- نمودار مکان ـ زمان متحرکی که با شتاب ثابت حرکت می‌کند، مطابق شکل است. تندی متوسط در بازهٔ زمانی که بردار مکان متحرک در جهت محور x است، چند متر بر ثانیه است؟



۱) ۵

۲) ۱۰

۳) $\frac{۵۳}{۷}$

۴) $\frac{۲۳}{۷}$

پاسخ تشریحی:

در ۱۴ ثانیهٔ ابتدایی، بردار مکان متحرک در جهت محور x است. در این بازه، متحرک ابتدا $۸۱-۵۶=۲۵m$ در جهت محور x حرکت می‌کند و سپس ۸۱m برمی‌گردد؛ بنابراین تندی متوسط برابر است با:

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}\Rightarrow s_{av}=\frac{(۸۱-۵۶)+۸۱}{۱۴}=\frac{۱۰۶}{۱۴}=\frac{۵۳}{۷}\frac{m}{s}$$

پاسخ: گزینهٔ ۳

۴۳- متحرکی بر مسیر مستقیم حرکت می‌کند و معادلهٔ سرعت ـ زمان آن در SI به‌صورت $v=t^۲-۴t+A$ است. شتاب متوسط آن در دو ثانیهٔ دوم حرکت، چند متر بر مربع ثانیه است؟

۱) ۲ ۲) ۲/۵ ۳) ۳ ۴) باید مقدار A معلوم باشد.

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۱۱ ـ ۱۲۰۱)

راه نجات سریع

مقدار A هیچ تأثیری توی جواب سؤال نداره؛ چون وقتی می‌خوای Δv رو حساب کنی، A حذف می‌شه.

کام اول

سرعت متحرک در ابتدا و انتهای بازهٔ زمانی یعنی لحظات $t_۱=۲s$ و $t_۲=۴s$ را می‌یابیم. با توجه به معادلهٔ سرعت ـ زمان متحرک می‌توانیم بنویسیم:

$$\begin{cases}v_۱=(۲)^۲-۴(۲)+A=-۴+A\\ v_۲=(۴)^۲-۴(۴)+A=A\end{cases}\Rightarrow \Delta v=v_۲-v_۱=۴\frac{m}{s}$$

کام آخر

به کمک رابطهٔ $a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}$ شتاب متوسط را محاسبه می‌کنیم:

$$a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{۴}{۲}=۲\frac{m}{s^۲}$$

از معادلهٔ سرعت ـ زمان چه اطلاعاتی به‌دست می‌آید؟

در این بخش می‌خواهیم ببینیم که با داشتن معادلهٔ سرعت ـ زمان چه اطلاعاتی به‌دست می‌آوریم. به‌عنوان مثال، فرض کنید که معادلهٔ سرعت ـ زمان متحرکی که روی محور x حرکت می‌کند، در SI به‌صورت $v=t^۲-۱۲t+۳۲$ است. اطلاعات زیر از این معادله قابل‌استخراج است:

۱- سرعت در هرلحظه: با جایگذاری زمان موردنظر در معادله، می‌توانیم سرعت را در هرلحظه به‌دست آوریم. مثلاً:

$$t_۱=۱s: v_۱=۱^۲-۱۲\times ۱+۳۲=۲۱\frac{m}{s}$$

$$t_۲=۴s: v_۲=۴^۲-۱۲\times ۴+۳۲=۰$$

۲- تغییرات سرعت: با کم‌کردن سرعت در دو لحظه از هم، تغییرات سرعت به‌دست می‌آید. مثلاً:

$$\begin{cases}t_۱=۱s: v_۱=۲۱\frac{m}{s}\\ t_۲=۴s: v_۲=۰\end{cases}\Rightarrow \Delta v=v_۲-v_۱=۰-۲۱=-۲۱\frac{m}{s}$$

دقت کنید که منفی‌شدن تغییرات سرعت به معنی آن است که بردار تغییرات سرعت در خلاف جهت محور x است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۳- شتاب متوسط: با تقسیم‌کردن تغییرات سرعت بر طول بازهٔ زمانی، شتاب متوسط به‌دست می‌آید. مثلاً:

در بازهٔ زمانی $t_1 = 1s$ تا $t_2 = 4s$: $a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{-21}{4-1} = -7\frac{m}{s^2}$

همان‌طور که می‌بینید، در بازهٔ زمانی $1s \le t < 4s$، شتاب متوسط منفی است، یعنی بردار آن در خلاف جهت محور x می‌باشد.

۴- تعیین جهت حرکت: هرگاه سرعت مثبت باشد، متحرک در جهت محور x حرکت می‌کند و هرگاه سرعت منفی باشد، متحرک در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند؛ بنابراین با تعیین علامت‌کردن سرعت، می‌توانیم جهت حرکت را بیابیم. مثلاً:

$v = t^2 - 12t + 32 = (t-4)(t-8) \Rightarrow$ ریشه‌ها: $\begin{cases} t_1 = 4s \\ t_2 = 8s \end{cases}$

جدول تعیین علامت:

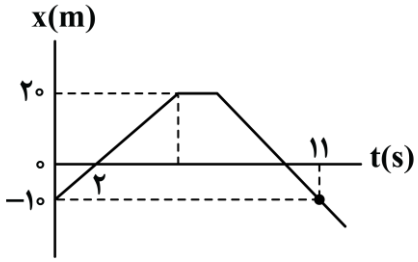
t	۰	4s	8s	+∞
v	+	۰	-	۰	+

+ : در جهت محور x حرکت می‌کند. - : در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند.

۵- تعیین لحظات تغییر جهت حرکت متحرک: لحظاتی که علامت سرعت تغییر می‌کند، جهت حرکت متحرک عوض می‌شود، مثلاً در قسمت قبل دیدیم که در لحظات $t_1 = 4s$ و $t_2 = 8s$، علامت سرعت عوض می‌شود و درنتیجه جهت حرکت متحرک در این لحظات تغییر می‌کند.

۶- برای به‌دست آوردن سایر اطلاعات مثل مسافت طی‌شده، تندی متوسط و ... کافی است نمودار مربوط به معادله را رسم کنید و از نکات مربوط به نمودار کمک بگیرید.

۴۴- نمودار مکان ـ زمان حرکت جسمی بر روی محور x، مطابق شکل زیر است. شتاب متوسط متحرک در ۵ ثانیهٔ دوم حرکت چند متر بر مربع ثانیه است؟ (متحرک به مدت ۲s ساکن بوده است.)



۱) −۱

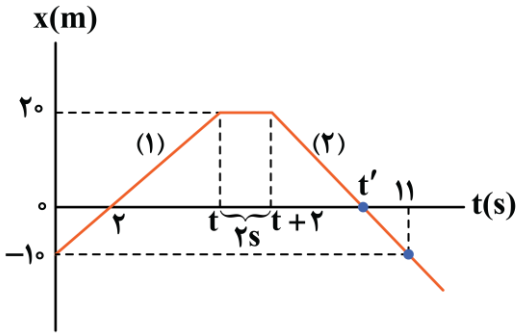
۲) ۱

۳) −۳

۴) ۳

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۱۱ ـ ۱۲۰۱)

گام اول



بر روی نمودار $x-t$، لحظات ابتدا و انتهای ساکن بودن متحرک و لحظه‌هایی که نمودار محور t را قطع می‌کند را مشخص می‌کنیم:

$v_1 = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{10}{2} = 5\frac{m}{s} \Rightarrow 5 = \frac{20}{t-2} \Rightarrow t = 6s$

$v_2 = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{-10-20}{11-8} = -10\frac{m}{s} \Rightarrow -10 = \frac{-10}{11-t'} \Rightarrow t' = 10s$

گام دوم

سرعت متحرک در لحظه‌های $t_1 = 5s$ و $t_2 = 10s$ را به‌دست می‌آوریم:

$t_1 = 5s \Rightarrow v_1 = 5\frac{m}{s}$

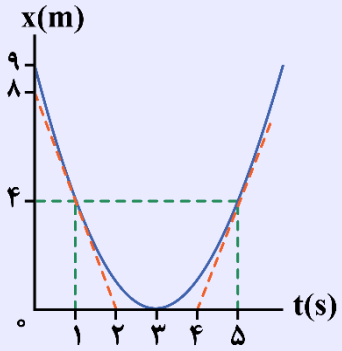
$t_2 = 10s \Rightarrow v_2 = -10\frac{m}{s}$

شتاب متوسط متحرک در ۵ ثانیهٔ دوم حرکت را به‌دست می‌آوریم:

$$a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{v_2-v_1}{\Delta t}=\frac{-10-5}{5}=\frac{-15}{5}=-3\frac{m}{s^2}$$

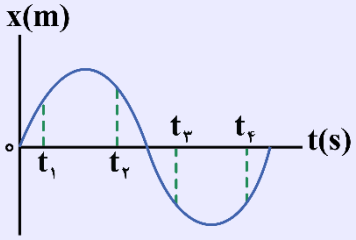
چگونه شتاب از روی نمودار مکان ـ زمان تعیین می‌شود؟

۱- شتاب متوسط: کافی است با کمک شیب خط مماس بر نمودار مکان ـ زمان، سرعت را در لحظات t_1 و t_2 مشخص کنیم و سپس با کمک رابطهٔ $a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}$، شتاب متوسط را به‌دست آوریم. مثلاً در نمودار مکان ـ زمان زیر، خط مماس بر نمودار در دو لحظهٔ $t_1=1s$ و $t_2=5s$ رسم شده‌اند. شتاب متوسط در این بازهٔ زمانی برابر است با:

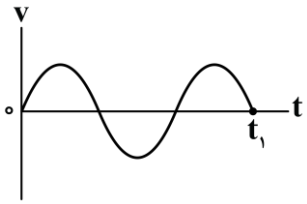


$$\begin{cases} v_{1s}=\frac{4-8}{1}=-4\frac{m}{s} \\ v_{5s}=\frac{4-0}{5-4}=4\frac{m}{s} \end{cases} \Rightarrow a_{av}=\frac{v_{5s}-v_{1s}}{\Delta t}=\frac{4-(-4)}{5-1}=2\frac{m}{s^2}$$

۲- شتاب لحظه‌ای: در قسمت‌هایی از نمودار مکان ـ زمان که تقعر نمودار به سمت بالا (نمودار به شکل ∪) است، شتاب مثبت (در جهت محور x) است و در قسمت‌هایی که تقعر به سمت پایین (نمودار به شکل ∩) است، شتاب منفی (در خلاف جهت محور x) است. مثلاً در نمودار مکان ـ زمان زیر، در لحظات t_1 و t_2 شتاب منفی است و در لحظات t_3 و t_4، شتاب مثبت است.



۴۵- نمودار سرعت ـ زمان متحرکی که بر روی محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است. اگر این متحرک در مبدأ زمان در مبدأ مکان باشد، در بازهٔ زمانی صفر تا t_1، به‌ترتیب از راست به چپ، چند بار جهت بردارهای سرعت و شتاب تغییر می‌کنند؟



۱) ۲، ۳
۲) ۳، ۲
۳) ۴، ۳
۴) ۴، ۲

پاسخ: گزینهٔ ۱ (آسان ـ مفهومی ـ سریع ـ صفحهٔ ۱۲ ـ ۱۲۰۱)

راه نجات سریع

در نمودار سرعت ـ زمان، ریشه‌های قاطع نمودار $v-t$، تغییر جهت سرعت و نقاط قله ـ دره، تغییر جهت شتاب هستند.

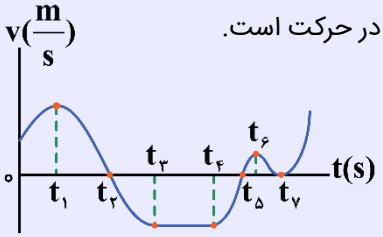
در نمودار $v-t$، ریشه‌های ساده (قطع‌کنندهٔ محور t)، لحظهٔ تغییر جهت سرعت را نشان می‌دهند؛ بنابراین با توجه به نمودار $v-t$، در ۲ لحظه بردار سرعت تغییر جهت داده است.

در نمودار $v-t$، در لحظه‌هایی که نمودار به حالت قله یا دره (اکسترمم نسبی) می‌رسد، علامت شتاب (جهت شیب نمودار) تغییر می‌کند؛ پس در ۳ لحظه بردار شتاب تغییر جهت داده است.

نمودار سرعت ـ زمان

در این درس‌نامه به مرورِ نکاتی می‌پردازیم که می‌توان آن‌ها را از نمودار سرعت ـ زمان حرکت یک متحرک به‌دست آورد.

برای این منظور نمودار سرعت ـ زمان زیر را درنظر بگیرید که مربوط به متحرکی است که روی محور x در حرکت است.



۱- جهت حرکت: هنگامی‌که سرعت جسم مثبت باشد، جسم درحال حرکت در جهت محور x می‌باشد و هنگامی‌که سرعت منفی باشد، جسم در خلاف جهت محور x در حرکت است. مثلاً در نمودار داده‌شده، در بازه‌ی صفر تا t_2 و از لحظهٔ t_5 به بعد متحرک درحال حرکت در جهت محور x است و در بازهٔ t_2 تا t_5 درحال حرکت در خلاف جهت محور x است. البته دقت کنید در خود لحظات t_2، t_5 و t_7 سرعت برای لحظه‌ای صفر شده و متحرک به‌طور لحظه‌ای متوقف شده است.

۲- لحظات تغییر جهت: هنگامی‌که علامت سرعت تغییر کند، متحرک تغییر جهت داده است. درواقع لحظاتی که نمودار سرعت ـ زمان محور افقی را قطع کرده و از آن عبور کند، لحظات تغییر جهت حرکت هستند. مثلاً در نمودار داده‌شده، در لحظات t_2 و t_5، جهت حرکت عوض شده است. دقت کنید در لحظهٔ t_7، علامت سرعت عوض نشده است و درنتیجه متحرک تغییر جهت نداده است.

۳- شتاب لحظه‌ای حرکت: شیب خط مماس بر نمودار سرعت ـ زمان در هر لحظه نشان‌دهندهٔ شتاب حرکت در آن لحظه است. مثلاً در نمودار داده‌شده، در بازه‌های صفر تا t_1، t_4 تا t_6 و از لحظهٔ t_7 به بعد، شتاب حرکت مثبت است و در بازه‌های t_1 تا t_3 و t_6 تا t_7 شتاب منفی است. دقت کنید در بازهٔ t_3 تا t_4، نمودار افقی است و شتاب حرکت صفر است و درنتیجه متحرک با سرعت ثابت درحال حرکت است.

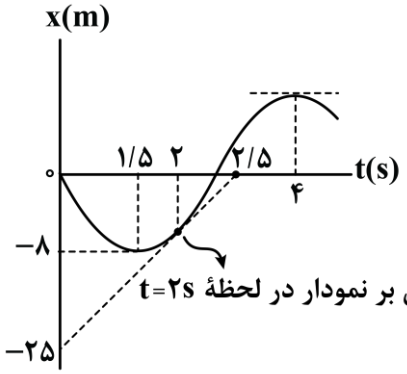
۴- شتاب متوسط حرکت: اگر دو نقطه از نمودار سرعت ـ زمان را با خط راست به‌هم وصل کنیم، شیب خط حاصل برابر شتاب متوسط حرکت در بازهٔ زمانی بین دو نقطه است.

۵- تندشونده یا کندشونده بودن حرکت: هرگاه نمودار سرعت ـ زمان به محور افقی نزدیک شود، حرکت کندشونده است و هرگاه درحال دورشدن از محور افقی باشد، حرکت تندشونده خواهد بود. مثلاً در نمودار داده‌شده، در بازه‌های زمانی صفر تا t_1، t_2 تا t_3، t_5 تا t_6 و از لحظهٔ t_7 به بعد حرکت تندشونده است و در بازه‌های t_1 تا t_2، t_4 تا t_5 و t_6 تا t_7 حرکت کندشونده بوده است. تندشونده بودن حرکت به معنی آن است که تندی متحرک درحال افزایش است و کندشونده بودن حرکت به معنی آن است که تندی متحرک درحال کاهش است.

۶- علاوه‌بر نکات فوق، با استفاده از نمودار سرعت ـ زمان، می‌توان کمیت‌هایی مثل جابه‌جایی، مسافت طی‌شده، سرعت متوسط و تندی متوسط را هم به‌دست آورد که این مباحث را در آزمون بعد بررسی می‌کنیم.

ماز

۴۶- در نمودار مکان ـ زمان شکل زیر، مقدار عددی اندازهٔ سرعت متوسط متحرک در بازهٔ $t_1=2s$ تا $t_2=3/5s$ در SI، ۸ برابر مقدار عددی اندازهٔ شتاب متوسط در ۲ ثانیهٔ دوم حرکتش در SI است. مسافت طی‌شده توسط متحرک در ۳/۵ ثانیهٔ اول حرکتش چند متر است؟ (خط مماس بر نمودار در لحظات $t=1/5s$ و $t=4s$ افقی است.)



۱) ۷۱

۲) ۷۳

۳) ۷۵

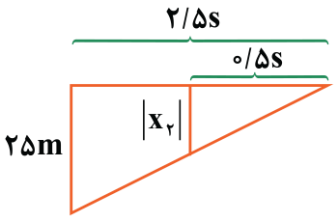
۴) ۷۰

پاسخ: گزینهٔ ۱ (سخت ـ مفهومی / محاسباتی ـ زمان‌بَر ـ صفحهٔ ۱۱ ـ ۱۲۰۱)

راه نجات سریع

اول مکان متحرک در لحظهٔ ۲s رو به‌دست بیار، بعدش مکانش در لحظهٔ ۳/۵s رو به کمک اطلاعات مسئله حساب کن. درنهایت مسافت طی‌شده از صفر تا ۳/۵s رو به‌دست بیار.

گام اول



ابتدا مکان متحرک در لحظهٔ $t=۲s$ را می‌یابیم:

$$\frac{|x_۲|}{۲۵}=\frac{۰/۵}{۲/۵}\Rightarrow|x_۲|=\frac{۲۵\times۰/۵}{۲/۵}=۵m\Rightarrow x_۲=-۵m$$

گام دوم

مکان متحرک در لحظهٔ $t=۳/۵s$ را با کمک اطلاعات مسئله می‌یابیم:

$$\left|(v_{av})_{۳/۵s\text{ تا }۲s}\right|=۸\left|(a_{av})_{۴s\text{ تا }۲s}\right|\Rightarrow\left|\frac{x_{۳/۵}-x_۲}{۳/۵-۲}\right|=\left|۸\times\frac{v_۴-v_۲}{۴-۲}\right|\Rightarrow\left|\frac{x_{۳/۵}+۵}{۱/۵}\right|=\left|۸\times\frac{۰-۱۰}{۲}\right|$$

$$\Rightarrow x_{۳/۵}=۵۵m$$

دقت کنید شیب نمودار در هر لحظه برابر با سرعت در آن لحظه است و سرعت در لحظات $۲s$ و $۴s$ از همین محاسبهٔ شیب به‌دست آمده است.

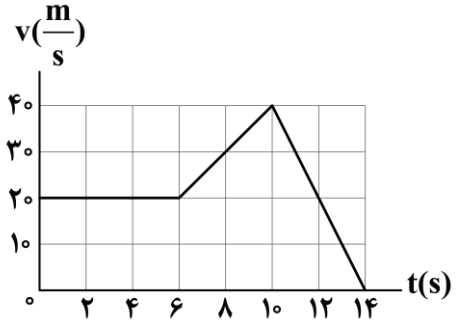
$$v_{۲s}=\text{شیب مماس}=\frac{۲۵}{۲/۵}=۱۰\frac{m}{s}\text{ و }v_{۴s}=\text{شیب مماس}=۰$$

گام آخر

با داده‌های به‌دست‌آمده مسافت در ۳/۵ ثانیهٔ اول را می‌یابیم:

$$\ell=|x_{۱/۵}-x_۰|+|x_{۳/۵}-x_{۱/۵}|=۸+۶۳=۷۱m$$

۴۷- نمودار سرعت ـ زمان خودرویی که در راستای محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است. شتاب متوسط خودرو در ۱۴ ثانیهٔ اول حرکت چند برابر شتاب خودرو در لحظهٔ $t=۱۱s$ است؟



۱) $\frac{۱}{۲}$

۲) ۲

۳) $\frac{۱}{۷}$

۴) ۷

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۱۲ ـ ۱۲۰۱)

نکته

وقتی نمودار سرعت ـ زمان متحرکی در یک بازهٔ زمانی معین به‌صورت خطی باشد، شتاب متحرک در هر لحظه داخل این بازه، همان شیب خط است.

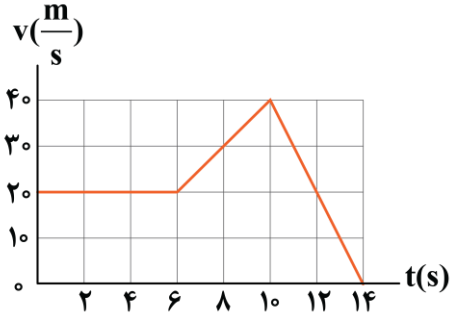
گام اول

محاسبهٔ شتاب متوسط در ۱۴ ثانیهٔ اول حرکت:

$$a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{۰-۲۰}{۱۴}=-\frac{۱۰}{۷}\frac{m}{s^۲}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

گام دوم



محاسبهٔ شتاب خودرو در لحظهٔ $t=11s$: چون در بازهٔ زمانی $t=10s$ تا $t=14s$، نمودار $v-t$ به‌صورت خطی با شیب ثابت است، شتاب متوسط در این بازهٔ زمانی ثابت و برابر شیب خط است.

$$a_{11s}=\frac{0-40}{14-10}=-10\frac{m}{s^2}$$

گام آخر

نسبت خواسته‌شده را به‌دست می‌آوریم:

$$\Rightarrow \frac{a_{av(14s\text{ تا }0)}}{a_{11s}}=\frac{\frac{-10}{7}}{-10}=\frac{1}{7}$$

ماز

۴۸- معادلهٔ سرعت ـ زمان متحرکی که روی محور x حرکت می‌کند، در SI به‌صورت $v=t^2-5t+6$ است. کدام مورد زیر صحیح است؟

۱) در ثانیهٔ سوم، شتاب متوسط منفی است.

۲) در ثانیهٔ سوم، بزرگی جابه‌جایی و مسافت طی‌شده برابر است.

۳) در چهار ثانیهٔ اول، متحرک یک بار تغییر جهت می‌دهد.

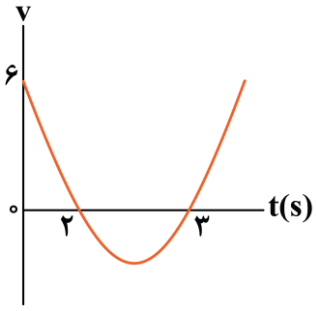
۴) در سه ثانیهٔ اول، بزرگی شتاب همواره کاهش می‌یابد.

پاسخ: گزینهٔ ۲ (سخت ـ مفهومی / محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۱۲ ـ ۱۲۰۱)

راه نجات سریع

معادلهٔ $v-t$ رو تجزیه کن و ریشه‌ها رو به‌دست بیار. بعدش نمودار $v-t$ رو رسم کن و گزینه‌ها رو بررسی کن.

نمودار سرعت ـ زمان متحرک را رسم کرده و گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:



$$v=(t-2)(t-3)$$

ریشه‌ها: $\begin{cases} t=2s \\ t=3s \end{cases}$

بررسی گزینه‌ها:

۱) در ابتدا و انتهای ثانیهٔ سوم ($2s$ و $3s$)، سرعت متحرک صفر است؛ بنابراین تغییر سرعت صفر بوده و شتاب متوسط صفر است. (✗)

۲) در ثانیهٔ سوم متحرک تغییر جهت نمی‌دهد (سرعت همواره کوچک‌تر یا مساوی صفر است)؛ پس بزرگی جابه‌جایی و مسافت طی‌شده برابر است. (✓)

۳) در چهار ثانیهٔ اول (صفر تا $4s$)، متحرک در لحظات $t=2s$ و $t=3s$ تغییر جهت می‌دهد. (✗)

۴) در سه ثانیهٔ اول (صفر تا $3s$) بزرگی شتاب (اندازهٔ شیب نمودار $v-t$) ابتدا کاهش سپس افزایش می‌یابد. (✗)

درس‌نامه

اگر معادلهٔ سرعت ـ زمان متحرکی به‌صورت درجهٔ (۲) $(v = At^{۲} + Bt + C)$ باشد، می‌توانیم بنویسیم:

۱- اگر A و C مختلف‌العلامت باشند، جهت حرکت متحرک تنها یک بار تغییر می‌کند (در ریشهٔ مثبت معادله).

۲- اگر A و C هم‌علامت باشند، دو حالت داریم:

الف) اگر $\Delta \leq ۰$ باشد، جهت حرکت تغییر نمی‌کند.

ب) اگر $\Delta > ۰$ باشد، جهت حرکت در دو لحظه (ریشه‌ها) تغییر می‌کند، به شرط آن‌که ریشه‌ها مثبت باشند.

۳- اگر A و B مختلف‌العلامت باشند، جهت بردار شتاب در $t = \frac{-B}{۲A}$ یعنی رأس سهمی **تغییر** می‌کند.

ماز

۴۹- متحرکی با سرعت ثابت بر روی محور x حرکت می‌کند. اگر این متحرک در لحظهٔ $t_۱ = ۲s$ در مکان $x_۱ = ۱m$ و در لحظهٔ $t_۲ = ۵s$ در مکان $x_۲ = ۱۰m$ باشد، معادلهٔ مکان ـ زمان این متحرک در SI کدام است؟

۱) $x = ۳t + ۵$ ۲) $x = ۲t + ۳$ ۳) $x = ۳t - ۵$ ۴) $x = t - ۱$

پاسخ: گزینهٔ ۳ (آسان ـ محاسباتی ـ سریع ـ صفحهٔ ۱۴ ـ ۱۲۰۱)

با توجه به معادلهٔ مکان ـ زمان حرکت با سرعت ثابت $(x = vt + x_۰)$ و اطلاعات داده‌شده در صورت سؤال، می‌توان نوشت:

$$x = vt + x_۰ \Rightarrow \begin{cases} ۲v + x_۰ = ۱ \\ ۵v + x_۰ = ۱۰ \end{cases}$$

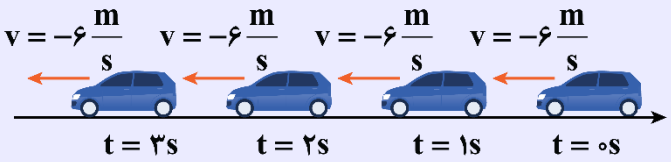
با حل دستگاه دو معادله دو مجهول فوق، $v = ۳\frac{m}{s}$ و $x_۰ = -۵m$ به‌دست می‌آید.

$$x = vt + x_۰ \Rightarrow x = ۳t - ۵$$

حرکت با سرعت ثابت

در این نوع حرکت، اندازه و جهت سرعت متحرک در طول مسیر ثابت است پس در حرکت با سرعت ثابت، سرعت متوسط متحرک در هر بازهٔ زمانی دلخواه برابر سرعت لحظه‌ای آن است:

اندازهٔ سرعت متوسط = تندی متوسط = اندازهٔ سرعت لحظه‌ای = تندی لحظه‌ای



حرکت با سرعت ثابت

- حرکت روی خط راست انجام می‌شود.
  - جهت سرعت ثابت است.
  - اندازهٔ سرعت ثابت است.
- تندی با گذشت زمان تغییر نمی‌کند.
  - اندازهٔ سرعت ثابت است.

اندازهٔ سرعت و جهت سرعت ثابت است.
پس شتاب حرکت صفر است: $a = ۰$

در حرکت با سرعت ثابت

۱- سرعت لحظه‌ای و سرعت متوسط باهم برابرند:
$v_{av} = v$

۲- شتاب حرکت صفر است.

۳- اندازهٔ جابه‌جایی و مسافت باهم برابرند $(|d| = L)$، درنتیجه در این حرکت اندازهٔ سرعت برابر تندی است $(|v| = s)$.

معادلهٔ مکان ـ زمان در حرکت با سرعت ثابت

$$x = \underset{\text{مکان در لحظهٔ } t}{x} = \underset{\text{سرعت}}{v}\underset{\text{زمان}}{t} + \underset{\text{مکان اولیه}}{x_0}$$

معادلهٔ جابه‌جایی ـ زمان حرکت با سرعت ثابت

$$\Delta x = \underset{\text{جابه‌جایی}}{\Delta x} = \underset{\text{سرعت}}{v}\underset{\text{زمان سپری‌شده}}{\Delta t}$$

چون جهت حرکت ثابت است، در این رابطه اندازهٔ Δx برابر مسافت طی‌شده می‌باشد.

چگونه با استفاده از مکان متحرک در دو لحظهٔ t_1 و t_2، معادلهٔ مکان ـ زمان حرکت با سرعت ثابت را به‌دست آوریم؟

۱- در معادلهٔ مکان ـ زمان حرکت با سرعت ثابت یعنی $x = vt + x_0$ به‌جای t و x مقادیرشان را در دو نقطه جایگذاری می‌کنیم.

۲- با استفاده از دستگاه دو معادله ـ دو مجهول، مقادیر x_0 و v را به‌دست می‌آوریم.

۳- طبق رابطهٔ $x = vt + x_0$، با داشتن v و x_0 معادلهٔ $x - t$ را می‌نویسیم.

۵۰- جسمی با سرعت ثابت بر روی محور x در حرکت است. اگر جسم در لحظهٔ $t_1 = 10s$ در مکان $x_1 = 11m$ و در لحظهٔ $t_2 = 20s$ در مکان $x_2 = 31m$ باشد، در کدام‌یک از بازه‌های زمانی زیر، بردار مکان متحرک همواره در خلاف جهت محور x است؟

۱) سه ثانیهٔ دوم ۲) دو ثانیهٔ سوم ۳) چهار ثانیهٔ اول ۴) ثانیهٔ پنجم

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۱۴ ـ ۱۲۰۱)

راه نجات سریع

با استفاده از دو معادله ـ دو مجهول، معادلهٔ مکان ـ زمان رو به‌دست بیار و لحظهٔ تغییر جهت بردار مکان $(x = 0)$ رو حساب کن. بعدش گزینه‌ها رو بررسی کن.

معادلهٔ حرکت یک متحرک که با سرعت ثابت در حرکت است، به‌صورت $x = vt + x_0$ است؛ بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$\begin{cases} x_1 = vt_1 + x_0 \\ x_2 = vt_2 + x_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 11 = 10v + x_0 \\ 31 = 20v + x_0 \end{cases} \Rightarrow v = 2\frac{m}{s}\ ,\ x_0 = -9m$$

بنابراین متحرک از مکان $x_0 = -9m$ شروع به حرکت کرده که با سرعت $2\frac{m}{s}$ بعد از $4/5s$ از مبدأ مکان $(x = 0)$ می‌گذرد؛ درنتیجه در بازهٔ زمانی صفر تا $4/5s$ متحرک در مکان‌های منفی قرار داشته و بردار مکان آن در خلاف جهت محور x بوده است. از بین گزینه‌ها، فقط گزینهٔ (۳) به‌طور کامل در این بازهٔ زمانی قرار دارد.

بررسی گزینه‌ها:

۱) (✗) سه ثانیهٔ دوم $\Rightarrow (۳s - ۶s)$

۲) (✗) دو ثانیهٔ سوم $\Rightarrow (۴s - ۶s)$

۳) (✓) چهار ثانیهٔ اول $\Rightarrow (۰ - ۴s)$

۴) (✗) ثانیهٔ پنجم $\Rightarrow (۴s - ۵s)$

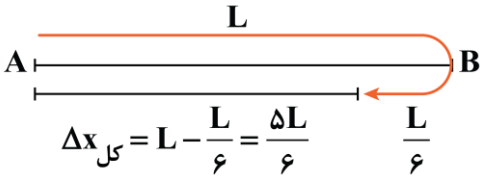
۵۱- متحرکی مسافتی را با تندی ثابت $۱۲\frac{km}{h}$، روی خط راست طی کرده و پس از آن $\frac{۱}{۶}$ مسیر رفت را با سرعت ثابتی به بزرگی $۱۸\frac{km}{h}$ برمی‌گردد. اندازهٔ سرعت متوسط متحرک در کل زمان حرکتش چند متر بر ثانیه است؟

۱) ۹ ۲) ۲/۵ ۳) ۳/۵ ۴) ۱۲/۶

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۱۴ ـ ۱۲۰۱)

حرکت متحرک در دو مرحله با سرعت ثابت صورت گرفته است؛ بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

گام اول



$$\begin{cases} \Delta x_۱ = L \\ v_۱ = ۱۲\frac{km}{h} = \frac{۱۲}{۳/۶}\frac{m}{s} = \frac{۱۰}{۳}\frac{m}{s} \\ t_۱ = \frac{\Delta x_۱}{v_۱} = \frac{L}{\frac{۱۰}{۳}} = \frac{۳L}{۱۰} \end{cases}$$

گام آخر

$$\begin{cases} \Delta x_۲ = -\frac{L}{۶} \\ |v_۲| = ۱۸\frac{km}{h} = \frac{۱۸}{۳/۶}\frac{m}{s} = ۵\frac{m}{s} \\ t_۲ = \frac{|\Delta x_۲|}{|v_۲|} = \frac{\frac{L}{۶}}{۵} = \frac{L}{۳۰} \end{cases}$$

سرعت متوسط در کل مسیر حرکت از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود: (توجه کنید که در مرحلهٔ دوم جابه‌جایی منفی است.)

$$v_{av} = \frac{\Delta x_{کل}}{t_{کل}} = \frac{\Delta x_۱ + \Delta x_۲}{t_۱ + t_۲} \Rightarrow v_{av} = \frac{L - \frac{L}{۶}}{\frac{۳L}{۱۰} + \frac{L}{۳۰}} = \frac{\frac{۵L}{۶}}{\frac{۱۰L}{۳۰}} = ۲/۵\frac{m}{s}$$

سرعت متوسط متحرک در حرکت چندمرحله‌ای

اگر متحرکی روی محور x (یا خط راست) دارای جابه‌جایی‌های متوالی باشد طوری که در مدت Δt_1، جابه‌جایی Δx_1 با سرعت متوسط v_{av_1} و در مدت Δt_2، جابه‌جایی Δx_2 با سرعت متوسط v_{av_2} و ... داشته باشد، سرعت متوسط آن در کل مسیر برابر می‌شود با:

$$v_{av_{کل}} = \frac{\Delta x_{کل}}{\Delta t_{کل}} = \frac{\Delta x_1 + \Delta x_2 + \cdots}{\Delta t_1 + \Delta t_2 + \cdots}$$

با توجه به رابطهٔ $\Delta x = v_{av}.\Delta t$، داریم:

$$v_{av_{کل}} = \frac{v_{av_1}.\Delta t_1 + v_{av_2}.\Delta t_2 + \cdots}{\Delta t_1 + \Delta t_2 + \cdots} \quad \text{یا} \quad v_{av_{کل}} = \frac{\Delta x_1 + \Delta x_2 + \cdots}{\frac{\Delta x_1}{v_{av_1}} + \frac{\Delta x_2}{v_{av_2}} + \cdots}$$

حواستان باشد که اگر Δx یا v_{av} در جهت محور x باشد با علامت مثبت و اگر در خلاف جهت محور x باشد با علامت منفی درنظر گرفته می‌شود.

اگر در هر مرحله، سرعت متحرک ثابت باشد یعنی $v_{av_1} = v_1$، $v_{av_2} = v_2$ و ... آنگاه داریم:

$$v_{av_{کل}} = \frac{\Delta x_1 + \Delta x_2 + \cdots}{\Delta t_1 + \Delta t_2 + \cdots} = \frac{v_1\Delta t_1 + v_2\Delta t_2 + \cdots}{\Delta t_1 + \Delta t_2 + \cdots} = \frac{\Delta x_1 + \Delta x_2 + \cdots}{\frac{\Delta x_1}{v_1} + \frac{\Delta x_2}{v_2} + \cdots}$$

تأکید می‌کنم این درس‌نامه زمانی صادق است که متحرک بر روی یک مسیر مستقیم حرکت کند!!!

نکته

۱- اگر متحرکی بر روی یک مسیر مستقیم در n بازهٔ زمانی یکسان و متوالی به‌ترتیب با سرعت‌های متوسط v_1، v_2 و ... v_n حرکت کند، داریم:

$$v_{av_{کل}} = \frac{v_1 + v_2 + \cdots + v_n}{n}$$

۲- اگر متحرکی مسافت ℓ_1 را در مدت Δt_1 با تندی متوسط s_{av_1}، مسافت ℓ_2 را در مدت Δt_2 با تندی متوسط s_{av_2} و ... طی کند داریم:

$$s_{av_{کل}} = \frac{\ell_1 + \ell_2 + \cdots}{\Delta t_1 + \Delta t_2 + \cdots} = \frac{s_{av_1}.\Delta t_1 + s_{av_2}.\Delta t_2 + \cdots}{\Delta t_1 + \Delta t_2 + \cdots} = \frac{\ell_1 + \ell_2 + \cdots}{\frac{\ell_1}{s_{av_1}} + \frac{\ell_2}{s_{av_2}} + \cdots}$$

۵۲- دو متحرک A و B هم‌زمان بر روی یک مسیر مشخص و مستقیم به طول ۴۸۰m از یک نقطه با تندی‌های $12\frac{m}{s}$ و $10\frac{m}{s}$ شروع به حرکت می‌کنند تا به مقصد برسند. بیش‌ترین فاصلهٔ دو متحرک از یکدیگر در حین حرکتشان به چند متر می‌رسد؟

۱) ۴۰ ۲) ۴۸ ۳) ۸۰ ۴) ۸

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۱۴ ـ ۱۲۰۱)

راه نجات سریع

بیش‌ترین فاصلهٔ دو متحرک از هم، زمانی است که متحرک سریع‌تر به مقصد می‌رسد.

بیش‌ترین فاصلهٔ دو متحرک از یکدیگر هنگامی رخ می‌دهد که متحرک سریع‌تر به مقصد رسیده و متحرک کندتر هنوز درحال حرکت است.

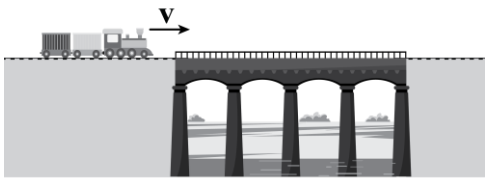
طبق رابطهٔ $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ داریم:

مدت‌زمان حرکت متحرک A: $\Delta t = \frac{\Delta x}{v} = \frac{۴۸۰}{۱۲} = ۴۰s$

متحرک کندتر در مدت‌زمان ۴۰ ثانیه به‌اندازهٔ $\Delta x = v_B \Delta t = ۱۰ \times ۴۰ = ۴۰۰m$ طی می‌کند؛ بنابراین حداکثر فاصلهٔ دو متحرک در حین حرکتشان به $۴۸۰ - ۴۰۰ = ۸۰m$ می‌رسد.

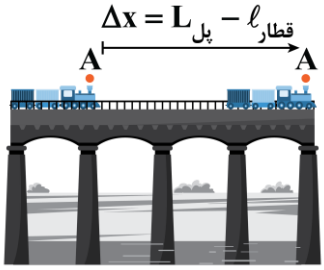
ماز

۵۳- مطابق شکل زیر، قطاری به طول ۲۰۰ متر با تندی $۲۰ \frac{m}{s}$ از روی یک پل به طول ۸۰۰m عبور می‌کند. مدت‌زمانی که قطار به‌طور کامل بر روی پل قرار داشته و حرکت می‌کند، چند ثانیه است؟



۱) ۱۰
۲) ۳۰
۳) ۴۰
۴) ۵۰

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۱۴ ـ ۱۲۰۱)



در شکل زیر، مدت‌زمانی که قطار به‌طور کامل بر روی پل قرار داشته و حرکت می‌کند، مشخص شده است. طبق این شکل، در این مدت قطار به‌اندازهٔ $L_{پل} - \ell_{قطار}$ جابه‌جا شده است. (برای سادگی، یک نقطه از قطار را درنظر گرفته و جابه‌جایی آن نقطه را بررسی کنید.)

$$\Delta x = L_{پل} - \ell_{قطار} = ۸۰۰ - ۲۰۰ = ۶۰۰m$$

$$\Delta x = v\Delta t \Rightarrow ۶۰۰ = ۲۰\Delta t \Rightarrow \Delta t = ۳۰s$$

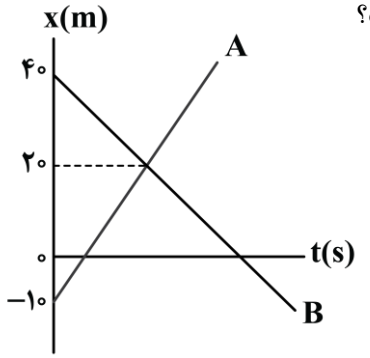
درس‌نامه

مسافتی که یک قطار به طول L بر روی یک پل به طول L' می‌پیماید، به‌طوری که قطار کاملاً بر روی پل قرار داشته باشد، طبق رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$\ell = L' - L$$

ماز

۵۴- نمودار مکان ـ زمان دو متحرک A و B که با سرعت ثابت بر روی محور x در حرکت هستند، مطابق شکل زیر است. در لحظه‌ای که متحرک B در فاصلهٔ ۱۰۰ متری مبدأ مکان است، فاصلهٔ متحرک A از مبدأ مکان چند متر است؟



۱) ۱۴۰
۲) ۱۶۰
۳) ۱۸۰
۴) ۲۰۰

پاسخ: گزینهٔ ۴ (سخت ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۱۴ ـ ۱۲۰۱)

روش اول

کام اول

هر دو متحرک با سرعت ثابت حرکت می‌کنند؛ بنابراین به کمک رابطهٔ $x = vt + x_۰$، داریم:

$$\begin{cases} x_{۰A} = -۱۰m \Rightarrow x_A = v_A t - ۱۰ \\ x_{۰B} = ۴۰m \Rightarrow x_B = v_B t + ۴۰ \end{cases} \xrightarrow[\text{در مکان } x=۲۰m \text{ هستند.}]{\text{در لحظهٔ } t_۱ \text{، هر دو متحرک}} \begin{cases} ۲۰ = v_A t_۱ - ۱۰ \Rightarrow t_۱ = \frac{۳۰}{v_A} \\ ۲۰ = v_B t_۱ + ۴۰ \Rightarrow t_۱ = \frac{-۲۰}{v_B} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{۳۰}{v_A} = \frac{-۲۰}{v_B} \Rightarrow v_A = -\frac{۳}{۲} v_B$$

گام دوم

متحرک B از مکان $x_{\circ B}=۴۰m$ با سرعت ثابت در خلاف جهت محور x عبور کرده است؛ پس در لحظه‌ای که فاصلهٔ متحرک B از مبدأ مکان ۱۰۰m می‌شود (لحظهٔ $t_۲$)، $x_B=-۱۰۰m$ خواهد بود و داریم:

$$x_B=v_Bt+۴۰\Rightarrow -۱۰۰=v_Bt_۲+۴۰\Rightarrow t_۲=\frac{-۱۴۰}{v_B}$$

گام آخر

حالا باید مکان متحرک A را در لحظهٔ $t_۲$ به‌دست آوریم:

$$x_A=v_At-۱۰\xrightarrow{v_A=-\frac{۳}{۲}v_B\ ,\ t_۲=\frac{-۱۴۰}{v_B}}x_A=-\frac{۳}{۲}v_B(\frac{-۱۴۰}{v_B})-۱۰=۲۱۰-۱۰=۲۰۰m$$

روش دوم

متحرک B تا لحظهٔ $t_۱$، $-۲۰m=۲۰-۴۰$ جابه‌جا شده و برای این‌که از مکان ۲۰m در لحظهٔ $t_۱$ به مکان $-۱۰۰m$ در لحظهٔ $t_۲$ برسد، یعنی $-۱۲۰m$ جابه‌جا شود، داریم:

$$\begin{cases}\Delta t=t_۱\Rightarrow -۲۰m\\ \Delta t'=t_۲-t_۱\Rightarrow -۱۲۰m\end{cases}\Rightarrow\frac{t_۱}{t_۲-t_۱}=\frac{-۲۰}{-۱۲۰}\Rightarrow\frac{t_۱}{t_۲-t_۱}=\frac{۱}{۶}\Rightarrow t_۲=۷t_۱$$

حالا همین تناسب را برای متحرک A می‌نویسیم:

$$\begin{cases}\Delta t=t_۱\Rightarrow ۲۰-(-۱۰)=۳۰m\\ \Delta t'=۶t_۱\Rightarrow x_A-۲۰m\end{cases}\Rightarrow\frac{t_۱}{۶t_۱}=\frac{۳۰}{x_A-۲۰}\Rightarrow x_A-۲۰=۱۸۰\Rightarrow x_A=۲۰۰m$$

بچه‌ها حواستون باشه که چون هر دو متحرک با سرعت ثابت حرکت می‌کنند، تونستیم به کمک تناسب، مسئله رو حلش کنیم.

سوتی‌های پرتکرار

حواست باشه، اگر جابه‌جایی متحرک A از لحظه‌ای که دو متحرک به‌هم می‌رسند تا لحظهٔ موردنظر رو حساب کنی ۱۸۰m می‌شه ولی این جواب سؤال نیست و دام گزینهٔ (۳) هست.

حرکت دو متحرک با سرعت ثابت چگونه بررسی می‌شود؟

هنگامی که دو متحرک به‌صورت هم‌زمان بر روی محور x حرکت می‌کنند، برای بررسی حرکت آن‌ها کافی است معادلهٔ مکان ـ زمان آن‌ها را بنویسیم و سپس با بررسی معادلات نوشته‌شده به سؤال پاسخ دهیم. مهم‌ترین چیزهایی که ممکن است از ما پرسیده شود، موارد زیر است:

۱- لحظهٔ به‌هم رسیدن دو متحرک: برای پیداکردن لحظهٔ به‌هم رسیدن دو متحرک، کافی است معادلهٔ مکان ـ زمان آن‌ها را باهم برابر قرار دهیم.

معادلهٔ مکان ـ زمان A: $x_A=v_At+x_{\circ A}$

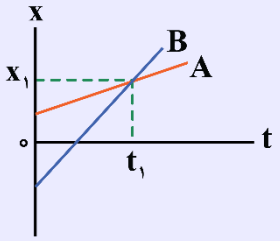
معادلهٔ مکان ـ زمان B: $x_B=v_Bt+x_{\circ B}$

شرط به‌هم رسیدن دو متحرک: $x_A=x_B\Rightarrow v_At+x_{\circ A}=v_Bt+x_{\circ B}$

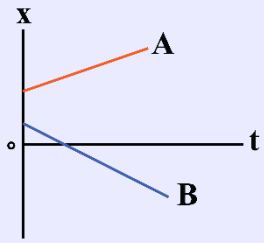
۲- محاسبهٔ فاصلهٔ دو متحرک: فاصلهٔ دو متحرک به معنی قدر مطلق اختلاف معادلهٔ مکان ـ زمان آن‌ها است؛ بنابراین در سؤالاتی که می‌خواهیم فاصلهٔ دو متحرک را به‌دست آوریم، ابتدا معادلهٔ مکان ـ زمان دو متحرک را می‌نویسیم، سپس قدر مطلق اختلاف مکان آن‌ها را محاسبه می‌کنیم.

فاصلهٔ دو متحرک از هم: $d=|x_A-x_B|\xrightarrow[x_B=v_Bt+x_{\circ B}]{x_A=v_At+x_{\circ A}}d=|v_At+x_{\circ A}-(v_Bt+x_{\circ B})|$

۳- نمودار مکان ـ زمان دو متحرک: گاهی در بررسی حرکت دو متحرک با سرعت ثابت، نمودار مکان ـ زمان آن‌ها رسم می‌شود. هنگامی که دو نمودار یکدیگر را قطع می‌کنند، دو متحرک به‌هم می‌رسند.



دو متحرک در لحظهٔ t_1 و مکان x_1 به هم می‌رسند.
(فاصلهٔ دو متحرک ابتدا کاهش و سپس افزایش می‌یابد.)



دو متحرک هیچ‌گاه به هم نمی‌رسند.
(فاصلهٔ دو متحرک همواره افزایش می‌یابد.)

ماز

۵۵- در یک لحظه موتورسواری از یک مکان با سرعت ثابت $۴۰\frac{m}{s}$ عبور می‌کند. اگر کامیونی در همان لحظه ۵۰ متر جلوتر از موتورسوار با سرعت ثابت $۱۵\frac{m}{s}$، در همان جهت حرکت کند، بعد از چند ثانیه برای دومین بار فاصلهٔ دو متحرک ۴۰ متر می‌شود؟

۱) ۰/۴ ۲) ۰/۱۸ ۳) ۳/۶ ۴) ۱/۶۳

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۱۴ ـ ۱۲۰۱)

روش اول

معادلهٔ مکان ـ زمان هر دو متحرک را می‌نویسیم (فرض می‌کنیم موتورسوار در ابتدا در مبدأ قرار داشته باشد و کامیون در مکان $x_{۰}=۵۰m$):

$$\begin{cases} x_{\text{موتورسوار}} = v_{\text{موتورسوار}}t + x_{۰\text{موتورسوار}} \\ x_{\text{کامیون}} = v_{\text{کامیون}}t + x_{۰\text{کامیون}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{\text{موتورسوار}} = ۴۰t \\ x_{\text{کامیون}} = ۱۵t + ۵۰ \end{cases}$$

$$\left|x_{\text{موتورسوار}} - x_{\text{کامیون}}\right| = ۴۰ \Rightarrow \left|۴۰t - ۱۵t - ۵۰\right| = ۴۰ \Rightarrow \begin{cases} ۲۵t - ۵۰ = ۴۰ \Rightarrow t = ۳/۶s \\ ۲۵t - ۵۰ = -۴۰ \Rightarrow t = ۰/۴s \end{cases}$$

فاصلهٔ دو متحرک برای اولین بار در $t=۰/۴s$ و برای دومین بار در $t=۳/۶s$، ۴۰ متر می‌شود.

روش دوم

سرعت نسبی دو متحرک را به‌دست می‌آوریم:

$$v_{\text{نسبی}} = ۴۰ - ۱۵ = ۲۵\frac{m}{s}$$

حالا لحظه‌ای که موتورسوار از کامیون ۴۰ متر جلو می‌افتد را حساب می‌کنیم:

$$d_{\text{نسبی}} = ۵۰ + ۴۰ = ۹۰m \;,\; t = \frac{d_{\text{نسبی}}}{v_{\text{نسبی}}} = \frac{۹۰}{۲۵} = ۳/۶s$$

سوتی‌های پرتکرار

حواست باشه، دومین لحظه‌ای که فاصلهٔ دو متحرک ۴۰m می‌شود یعنی لحظه‌ای که موتور ۴۰m جلوتر می‌افتد. توی دام گزینهٔ (۱) نیفتی!

سرعت نسبی

۱- اگر دو متحرک خلاف جهت یکدیگر حرکت کنند:



$$v_{\text{نسبی}} = |v_1| + |v_2|$$

۲- اگر دو متحرک هم‌جهت حرکت کنند:



$$v_{\text{نسبی}} = |v_1 - v_2|$$

جابه‌جایی نسبی دو متحرک از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$d_{\text{نسبی}} = v_{\text{نسبی}}\Delta t$$

کنکور سراسری علوم تجربی نوبت دوم خارج از کشور ۱۴۰۲

دو متحرک با تندی ثابت v_1 و $v_2 > v_1$ روی خط راست طوری حرکت می‌کنند که اگر خلاف جهت هم بروند، فاصلهٔ آن‌ها در هر ثانیه ۱۶ متر تغییر می‌کند و اگر هم‌جهت حرکت کنند، فاصلهٔ آن‌ها در هر دقیقه ۲۴۰ متر تغییر می‌کند. $\frac{v_2}{v_1}$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $\frac{۴}{۳}$ ۳) $\frac{۵}{۳}$ ۴) $\frac{۷}{۵}$

پاسخ تشریحی:

در حالت اول که دو متحرک در خلاف جهت هم حرکت می‌کنند، تندی نسبی دو متحرک برابر است با مجموع تندی دو متحرک و در حالت دوم که دو متحرک در یک جهت حرکت می‌کنند، تندی نسبی دو متحرک برابر است با مقدار اختلاف تندی دو متحرک؛ بنابراین می‌توان نوشت:

$$v = v_1 + v_2$$
$$v' = v_2 - v_1$$

از طرفی با توجه به رابطهٔ $v = \frac{d}{\Delta t}$ می‌توان نوشت:

$$v = \frac{d}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t = ۱s]{d = ۱۶m} v = \frac{۱۶}{۱} = ۱۶\frac{m}{s}$$
$$v' = \frac{d'}{\Delta t'} \xrightarrow[\Delta t' = ۶۰s]{d' = ۲۴۰m} v' = \frac{۲۴۰}{۶۰} = ۴\frac{m}{s}$$

درنهایت با تشکیل دستگاه دو معادله و دو مجهول داریم:

$$\begin{cases} v_1 + v_2 = ۱۶ \\ v_2 - v_1 = ۴ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_2 = ۱۰\frac{m}{s} \\ v_1 = ۶\frac{m}{s} \end{cases} \Rightarrow \frac{v_2}{v_1} = \frac{۱۰}{۶} = \frac{۵}{۳}$$

پاسخ: گزینهٔ ۳

۵۶- **چه تعداد از عبارت‌های زیر در مورد ویژگی‌های مواد صحیح است؟**

الف: ذرات سازندهٔ جامدهای آمورف، برخلاف جامدهای بلورین، در طرح‌های منظمی کنار هم قرار ندارند.

ب: فاصلهٔ ذرات سازندهٔ مایع و جامد تقریباً یکسان و در حدود یک آنگستروم است، اما مولکول‌های مایع نظم و تقارن جامدهای بلورین را ندارند.

ج: دلیل پخش ذرات جوهر در آب، حرکت نامنظم و کاتوره‌ای مولکول‌های آب است.

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینهٔ ۴ (آسان ـ خط‌به‌خط ـ سریع ـ صفحهٔ ۲۶ ـ ۱۰۰۲)

طبق متن کتاب درسی، هر سه عبارت مطرح‌شده در این سؤال صحیح هستند.

بررسی بیش‌تر عبارت «ج»:

دلیل پخش ذرات نمک و جوهر در آب، به حرکت مولکول‌های آب مربوط می‌شود. درواقع به‌دلیل حرکت‌های نامنظم و کاتوره‌ای (تصادفی) مولکول‌های آب و برخورد آن‌ها با ذرات سازندهٔ نمک و جوهر، این‌گونه مواد در آب پخش می‌شوند.

خلاصهٔ حفظیات مربوط به حالت‌های ماده

۱- مواد از ذره‌های ریزی به نام اتم یا مولکول تشکیل شده‌اند. اندازهٔ اتم‌ها در حدود یک تا چند آنگستروم است و اندازهٔ مولکول‌ها به این بستگی دارد که از چند اتم ساخته شده باشند. اندازهٔ برخی درشت‌مولکول‌ها مانند بسپارها (پلیمرها) می‌تواند تا ۱۰۰۰ آنگستروم نیز باشد.

۲- ذره‌های سازندهٔ مواد همواره در حرکت‌اند و به یکدیگر نیرو وارد می‌کنند. حالت ماده به چگونگی حرکت این ذره‌ها و اندازهٔ نیروی بین آن‌ها بستگی دارد.

۳- جسم جامد، حجم و شکل معینی دارد. ذرات جامد به سبب نیروهای الکتریکی که به یکدیگر وارد می‌کنند، در کنار هم می‌مانند. این ذرات در مکان‌های معینی نسبت به یکدیگر قرار دارند و در اطراف این مکان‌ها، نوسان‌های بسیار کوچکی دارند.

۴- جامدها به دو دسته تقسیم می‌شوند:

الف) جامدهای بلورین ب) جامدهای آمُورف (بی‌شکل)

۵- جامدهای بلورین، جامدهایی هستند که اتم‌های آن‌ها در طرح‌های منظمی کنار هم قرار می‌گیرند و از یک الگوی سه‌بعدی تکرارشونده از این واحدهای منظم ساخته می‌شوند.

۶- فلزها، نمک‌ها، الماس، یخ و بیش‌تر مواد معدنی ازجمله جامدهای بلورین هستند.

۷- وقتی مایعی را به‌آهستگی سرد کنیم، اغلب جامد بلورین تشکیل می‌شود؛ زیرا در این فرایند، ذرات مایع فرصت کافی دارند تا در طرح‌های منظمی خود را مرتب کنند.

۸- جامد آمُورف، جامدی است که ذرات آن در طرح‌های منظمی کنار هم قرار ندارند. شیشه و قیر مثال‌هایی از یک جامد آمُورف هستند.

۹- وقتی مایعی را به‌سرعت سرد کنیم، معمولاً جامد آمُورف به‌وجود می‌آید؛ زیرا در این فرایند، ذرات فرصت کافی ندارند تا در طرحی منظم، مرتب شوند.

۱۰- مولکول‌های مایع، نظم و تقارن جامدهای بلورین را ندارند و به‌صورت نامنظم و نزدیک به یکدیگر قرار گرفته‌اند. مایع به‌راحتی جاری می‌شود و به شکل ظرف خودش درمی‌آید؛ زیرا مولکول‌های مایع می‌توانند روی هم بلغزند.

۱۱- فاصلهٔ بین ذرات سازندهٔ جامد و مایع تقریباً یکسان و در حدود یک آنگستروم است.

۱۲- حل شدن نمک در آب و پخش شدن جوهر در آب مثال‌هایی از پدیده‌ای به نام پدیدهٔ پخش در مایع هستند. دلیل این پدیده به حرکت‌های نامنظم و کاتوره‌ای مولکول‌های آب و برخورد آن‌ها با ذرات سازندهٔ نمک و جوهر مربوط می‌شود که موجب پخش آن‌ها در آب می‌گردد.

۱۳- گاز، ماده‌ای است که شکل و حجم مشخصی ندارد. اتم‌ها و مولکول‌های آن آزادانه و با تندی بسیار زیاد به اطراف حرکت و با یکدیگر و با دیواره‌های ظرفی که در آن قرار دارند، برخورد می‌کنند.

۱۴- فاصلهٔ میانگین مولکول‌های گاز در مقایسه با اندازهٔ آن‌ها، خیلی بیش‌تر است. مثلاً اندازهٔ مولکول‌های هوا بین ۱ تا ۳ آنگستروم است، درحالی‌که فاصلهٔ میانگین آن‌ها در شرایط معمولی در حدود ۳۵ آنگستروم می‌باشد.

۱۵- با ورود هوا به درون یک سرنگ می‌بینیم که به‌راحتی می‌توانیم سرنگ را فشرده کنیم؛ اما با ریختن آب به درون آن می‌بینیم که نمی‌توان پیستون سرنگ را به پایین آورده و آن را متراکم کرد. از این آزمایش نتیجه می‌گیریم که گازها تراکم‌پذیرند اما مایعات تقریباً تراکم‌ناپذیر می‌باشند.

۱۶- حرکت نامنظم و کاتوره‌ای ذرات دود در هوا را حرکت براونی می‌گوییم. دلیل این حرکت نامنظم، برخورد ذرات دود با مولکول‌های هوا است که به‌طور نامنظم و کاتوره‌ای درحال حرکت هستند.

۱۷- پدیدهٔ پخش در گازها نیز رخ می‌دهد. مثالی از آن را می‌توانیم هنگام بازکردن درب یک شیشهٔ عطر ببینیم که پس از چند ثانیه ذرات عطر در همه‌جای اتاق پخش و بوی آن حس می‌شود. سرعت پدیدهٔ پخش در گازها از مایعات بیش‌تر است و دلیل آن تندتر بودن حرکت مولکول‌های گاز و بیش‌تر بودن فاصلهٔ بین آن‌ها است.

۱۸- حالت چهارم ماده پلاسما نامیده می‌شود که اغلب در دماهای خیلی بالا به‌وجود می‌آید. مادهٔ درون ستارگان و بیش‌تر فضای بین‌ستاره‌ای، آذرخش، شفق‌های قطبی، آتش و مادهٔ داخل لولهٔ تابان لامپ‌های مهتابی از پلاسما تشکیل شده است.

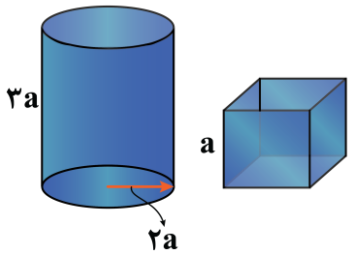
SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۵۷- یک مکعب توپُر مسی و یک استوانهٔ توپُر مسی بر روی سطح افقی قرار دارند. اگر شعاع قاعدهٔ استوانه، ۲ برابر طول ضلع مکعب و ارتفاع استوانه ۳ برابر طول ضلع مکعب باشد، فشار ناشی از استوانه بر سطح افقی، چند برابر فشار ناشی از مکعب بر سطح افقی است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) ۱۲π

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ محاسباتی ـ سریع ـ صفحهٔ ۳۴ ـ ۱۰۰۲)

با توجه به این‌که سطح مقطع هر دو شکل در کل ارتفاع آن‌ها یکسان است، برای محاسبهٔ فشار ناشی از آن‌ها، می‌توان از رابطهٔ $P=\rho gh$ استفاده کرد؛ بنابراین می‌توان نوشت:



$$P=\rho gh \Rightarrow \frac{P_{\text{استوانه}}}{P_{\text{مکعب}}}=\frac{\rho g(۳a)}{\rho g(a)}=۳$$

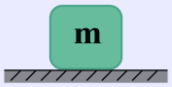
رفع ابهام

توی این سؤال نسبت سطح مقطع استوانه به مکعب مهم نیست.

فشار جامدات

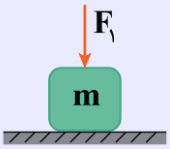
در محاسبهٔ فشار جامدات به نکات زیر توجه کنید:

۱- اگر جسم، روی سطح ساکن باشد و نیروی خارجی به آن وارد نشود، نیروی عمودی سطح برابر وزن جسم است و فشار برابر است با:

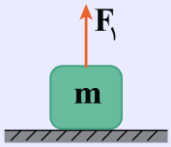


$$P=\frac{F}{A}=\frac{mg}{A}$$

۲- اگر جسم، روی سطح ساکن باشد و نیروی قائمی به آن وارد شود، فشار وارد بر سطح برابر است با:



$$P=\frac{mg+F_۱}{A}$$



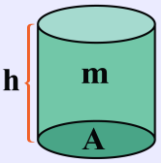
$$P=\frac{mg-F_۱}{A}$$

۳- اگر جسم، کف آسانسوری قرار داشته باشد که با شتاب a حرکت می‌کند، فشار وارد بر کف آسانسور برابر است با:

$$P=\frac{m(g\pm a)}{A}$$

$+\leftarrow$ اگر شتاب به سمت بالا باشد. $-\leftarrow$ اگر شتاب به سمت پایین باشد.

۴- اگر جسم جامد به‌گونه‌ای باشد که سطح مقطع آن در همهٔ ارتفاع‌ها ثابت باشد، می‌توان فشار وارد بر سطح را به‌صورت زیر محاسبه کرد:



$$\begin{cases}P=\frac{mg}{A}\\ m=\rho V\end{cases}\Rightarrow P=\frac{\rho Vg}{A}\xrightarrow{V=Ah}P=\rho gh$$

دقت کنید که این رابطه فقط برای اجسامی مثل مکعب و استوانه برقرار است که مساحت مقطع آن‌ها در همهٔ ارتفاع‌ها ثابت است. برای اجسامی مثل مخروط و هرم که مساحت مقطع آن‌ها به‌تدریج تغییر می‌کند، استفاده از این رابطه مجاز نیست.

۵- اگر مخروطی به مساحت قاعدهٔ A و ارتفاع h دراختیار داشته باشیم، حجم آن از رابطهٔ $V=\frac{۱}{۳}Ah$ به‌دست می‌آید. اکنون می‌توان نوشت:

$$P=\frac{mg}{A}\xrightarrow{m=\rho V}P=\frac{\rho Vg}{A}=\frac{\frac{۱}{۳}\rho Ahg}{A}\Rightarrow P=\frac{۱}{۳}\rho gh$$

یه نمونهٔ باحال

شعاع قاعدهٔ مخروط توپر فلزی برابر $۱۰cm$ و ارتفاع آن برابر $۲۰cm$ است. اگر چگالی مادهٔ سازندهٔ این مخروط $۱/۵\frac{g}{cm^۳}$ باشد، فشار مخروط به سطح زیرین آن چند پاسکال است؟ $(\pi \simeq ۳ \ , \ g=۱۰\frac{N}{kg})$

پاسخ تشریحی:

$$P=\frac{۱}{۳}\rho gh=\frac{۱}{۳}\times ۱/۵\times ۱۰^{۳}\times ۱۰\times ۲۰\times ۱۰^{-۲}=۱۰۰۰Pa$$

۵۸- در ارتفاع حدود ۸۰۰۰ متری از سطح دریا، فشار هوا ۳۴kPa است. این فشار، چند سانتی‌متر جیوه است؟

$$(g=۱۰\frac{N}{kg} \ , \ \rho_{جیوه}=۱۳/۶\frac{g}{cm^۳})$$

۱) ۳۰ ۲) ۲۵ ۳) ۱۲/۵ ۴) ۱۵

پاسخ: گزینهٔ ۲ (آسان ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۳۷ ـ ۱۰۰۲)

برای تبدیل فشار از Pa به سانتی‌متر جیوه، می‌توان از رابطهٔ $P=\rho gh$ استفاده کرد؛ بنابراین می‌توان نوشت:

$$P=\rho gh \Rightarrow ۳۴\times ۱۰^{۳}=۱۳۶۰۰\times ۱۰\times h_{جیوه} \Rightarrow h_{جیوه}=\frac{۱}{۴}m=۰/۲۵m=۲۵cm$$

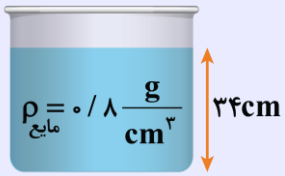
درنتیجه فشار ۲۵ سانتی‌متر جیوه است.

محاسبهٔ فشار برحسب سانتی‌متر جیوه

وقتی یک فشار را برحسب $cmHg$ از ما می‌خواهند، منظور این است که چه ارتفاعی از جیوه می‌تواند فشار موردنظر را تولید کند. پس برای محاسبهٔ فشار برحسب $cmHg$ کافی است فشار موردنظر را با فشار جیوهٔ فرضی برابر قرار داده و ارتفاع جیوهٔ معادل با آن فشار را محاسبه کنیم:

$$فشار\ موردنظر=\rho_{جیوه}gh_{جیوه} \Rightarrow h_{جیوه}=?$$

به‌عنوان مثال در شکل زیر، می‌خواهیم فشار مایع را برحسب $cmHg$ محاسبه کنیم:

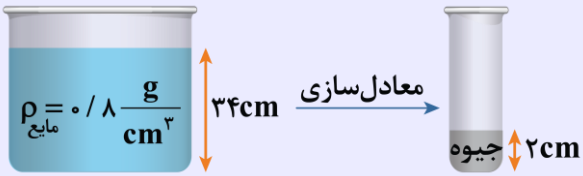


فشار ستون جیوهٔ فرضی = فشار ناشی از مایع

$$\Rightarrow \rho_{مایع}\cancel{g}h_{مایع}=\rho_{جیوه}\cancel{g}h_{جیوه} \Rightarrow \rho_{مایع}h_{مایع}=\rho_{جیوه}h_{جیوه}$$

$$\Rightarrow ۰/۸\times ۳۴=۱۳/۶\times h_{جیوه} \Rightarrow h_{جیوه}=۲cm$$

پس فشار این مایع معادل $۲cmHg$ است.



نکات نهایی مربوط به محاسبهٔ فشار برحسب cmHg

۱- اگر فشار یک مایع را برحسب $cmHg$ بخواهیم، باید از رابطهٔ زیر، ارتفاع جیوه را به‌دست آوریم:

$$\rho_{مایع}h_{مایع}=\rho_{جیوه}h_{جیوه} \Rightarrow h_{جیوه}=\frac{\rho_{مایع}h_{مایع}}{\rho_{جیوه}}$$

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

نکته

در استفاده از این رابطه حتماً لازم نیست همهٔ یکاها برحسب SI باشند. فقط کافی است یکای دو طرف معادله باهم سازگار باشند. به‌عنوان مثال اگر فشار را برحسب mmHg بخواهند، باید یکای h در دو طرف معادله برحسب mm باشد و یکای ρ در دو طرف معادله باهم سازگار باشند:

$$\rho_{\text{مایع}} h_{\text{مایع}} = \rho_{\text{جیوه}} h_{\text{جیوه}}$$

$\rho_{\text{جیوه}}$, $\rho_{\text{مایع}}$: هر دو یکای یکسان داشته باشند. $h_{\text{جیوه}}$, $h_{\text{مایع}}$: هر دو برحسب mm

۲- برای تبدیل پاسکال به cmHg کافی است فشار موردنظر را با ρgh جیوه برابر قرار داده و h جیوه را به‌دست آوریم:

$$\text{فشار موردنظر برحسب پاسکال} = \rho_{\text{جیوه}} g h_{\text{جیوه}} \Rightarrow h_{\text{جیوه}} = ?$$

دقت کنید که در این رابطه همهٔ یکاها را برحسب SI قرار می‌دهیم و h هم برحسب متر به‌دست می‌آید. حال براساس خواسته سؤال h را به cm یا mm تبدیل می‌کنیم.

یه نمونهٔ باحال

فشار هوا در یک مکان برابر ۹۵/۲kPa می‌باشد. این فشار چند سانتی‌متر جیوه است؟ $(g = ۱۰ \frac{N}{kg}$ و $\rho_{\text{جیوه}} = ۱۳/۶ \frac{g}{cm^۳})$

پاسخ تشریحی:

$$\text{فشار موردنظر برحسب پاسکال} = \rho_{\text{جیوه}} g h_{\text{جیوه}}$$

$$\Rightarrow ۹۵/۲ \times ۱۰^۳ = ۱۳/۶ \times ۱۰^۳ \times ۱۰ \times h_{\text{جیوه}} \Rightarrow h_{\text{جیوه}} = ۰/۷m = ۷۰cm$$

درنتیجه فشار هوا در این مکان ۷۰cmHg است.

نکته

برای تبدیل فشار پاسکال و سانتی‌متر جیوه به یکدیگر برحسب چگالی جیوه، به روش زیر اقدام کنید:

$$\rho_{Hg} = ۱۳/۶ \frac{g}{cm^۳} \qquad cmHg \xrightarrow{\times ۱۳۶۰} Pa \qquad Pa \xrightarrow{\div ۱۳۶۰} cmHg$$

دقت کنید که اگر در سؤال، چگالی جیوه را عوض کردند، عدد تناسب هم عوض می‌شود:

$$\rho_{Hg} = ۱۳/۵ \frac{g}{cm^۳} \qquad cmHg \xrightarrow{\times ۱۳۵۰} Pa \qquad Pa \xrightarrow{\div ۱۳۵۰} cmHg$$

نکته

اگر مایع درون ظرف، جیوه بود، ارتفاع خود جیوه همان فشار برحسب سانتی‌متر جیوه است:



$$P_{\text{مایع}} = ۷ cmHg$$

یه نمونهٔ باحال

با توجه به شکل زیر، اگر فشار هوا در محل ۷۵cmHg باشد، فشار در کف ظرف چند سانتی‌متر جیوه است؟



$(\rho_{\text{مایع}} = ۳/۴ \frac{g}{cm^۳}$, $\rho_{\text{جیوه}} = ۱۳/۶ \frac{g}{cm^۳})$

پاسخ تشریحی:

$$P_{\text{کف}} = P_{\circ} + P_{\text{جیوه}} + P_{\text{مایع}}$$

برای جیوه، عدد فشار برحسب cmHg با عدد ارتفاع جیوه مساوی است؛ بنابراین:

$$P_{\text{جیوه}} = ۵ cmHg$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

اما باید فشار مایع را برحسب cmHg به‌دست آوریم:

$$\rho_{\text{جیوه}} h_{\text{جیوه}} = \rho_{\text{مایع}} h_{\text{مایع}}$$

$$\Rightarrow ۱۳/۶ \times h_{\text{جیوه}} = ۳/۴ \times ۴۰ \Rightarrow h_{\text{جیوه}} = ۱۰\,\text{cm} \Rightarrow P_{\text{مایع}} = ۱۰\,\text{cmHg}$$

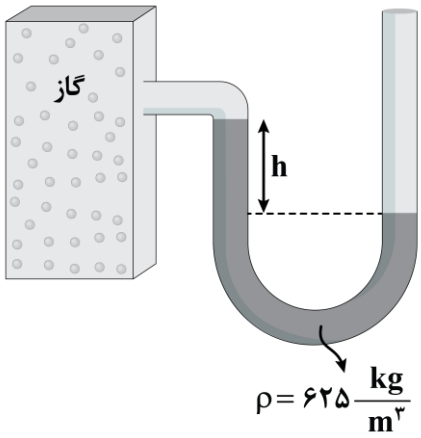
بنابراین می‌توان نوشت:

$$P_{\text{کف}} = ۷۵\,\text{cmHg} + ۵\,\text{cmHg} + ۱۰\,\text{cmHg} = ۹۰\,\text{cmHg}$$

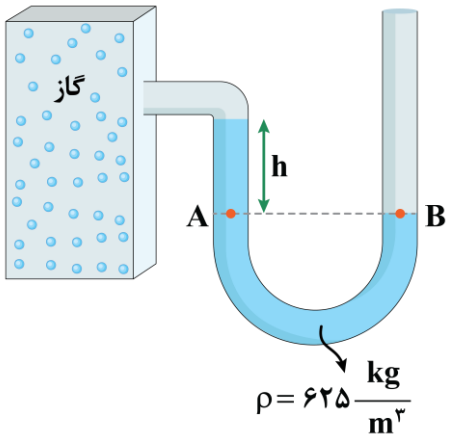
ماز

۵۹- در شکل زیر، فشار پیمانه‌ای مخزن $-۲/۵\,\text{kPa}$ است. h چند سانتی‌متر است؟ $\left(g = ۱۰ \frac{\text{N}}{\text{kg}}\right)$

۱) ۱۵
۲) ۲۰
۳) ۳۰
۴) ۴۰



پاسخ: گزینهٔ ۴ (آسان ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۳۹ ـ ۱۰۰۲)



مطابق شکل زیر، با توجه به برابری فشار در نقاط A و B داریم:

$$P_A = P_B \Rightarrow P_{\text{گاز}} + \rho g h = P_۰$$

$$\Rightarrow P_{\text{گاز}} - P_۰ = -\rho g h$$

$$\xrightarrow[\rho = ۶۲۵ \frac{\text{kg}}{\text{m}^۳}]{P_g = P_{\text{گاز}} - P_۰ = -۲/۵\,\text{kPa} = -۲۵۰۰\,\text{Pa}} -۲۵۰۰ = -۶۲۵ \times ۱۰ \times h$$

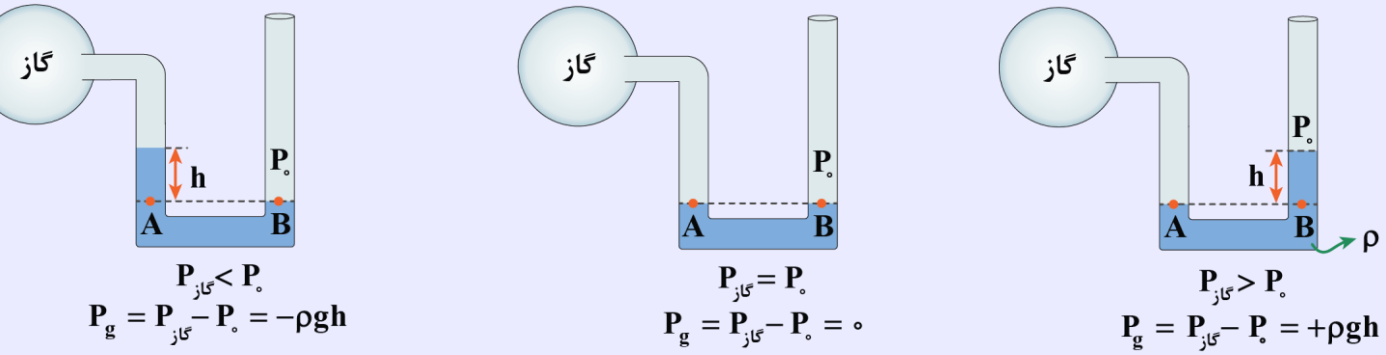
$$\Rightarrow h = ۰/۴\,\text{m} = ۴۰\,\text{cm}$$

فشار پیمانه‌ای

به اختلاف فشار مطلق (فشار یک نقطه از گاز یا مایع) با فشار هوا، فشار پیمانه‌ای گفته می‌شود و آن را با نماد P_g نمایش می‌دهند:

$$P_g = P_{\text{مطلق}} - P_\circ$$

با توجه به تعریف بالا، فشار پیمانه‌ای می‌تواند مثبت، منفی یا صفر باشد که در ادامه هر سه حالت را برای فشار پیمانه‌ای گاز در مانومتر بررسی می‌کنیم:



$P_{\text{گاز}} > P_\circ$
$P_g = P_{\text{گاز}} - P_\circ = +\rho gh$

$P_{\text{گاز}} = P_\circ$
$P_g = P_{\text{گاز}} - P_\circ = \circ$

$P_{\text{گاز}} < P_\circ$
$P_g = P_{\text{گاز}} - P_\circ = -\rho gh$

در تمام این سه شکل، از برابری فشار در نقاط A و B استفاده شده و فشار پیمانه‌ای گاز محبوس در مخزن به‌دست آمده است.

نکته

عددی که فشارسنج‌ها نشان می‌دهند، فشار پیمانه‌ای است، یعنی فشارسنج‌ها اختلاف فشار مطلق با فشار هوا را نشان می‌دهند، پس فشارسنج‌های پزشکی و صنعتی (مانومتر، بوردون و ...) فشار پیمانه‌ای را نشان می‌دهند (نه فشار مطلق را).

نکته

عددی که فشارسنج‌ها نشان می‌دهند، فشار پیمانه‌ای است، یعنی فشارسنج‌ها اختلاف فشار مطلق با فشار هوا را نشان می‌دهند، پس فشارسنج‌های پزشکی و صنعتی (مانومتر، بوردون و ...) فشار پیمانه‌ای را نشان می‌دهند (نه فشار مطلق را).

✓ هنگام اندازه‌گیری فشارخون یا فشار هوای درون تایر، فشار پیمانه‌ای نشان داده می‌شود. به‌عنوان مثال اگر فشارسنج، فشار هوای درون یک تایر را $۲/۴P_\circ$ نشان دهد، فشار کل آن $۳/۴P_\circ$ است.

$$P_{\text{پیمانه‌ای}} = P_{\text{گاز}} - P_\circ \Rightarrow ۲/۴P_\circ = P_{\text{گاز}} - P_\circ \Rightarrow P_{\text{گاز}} = ۳/۴P_\circ$$

یه نمونهٔ باحال

در عمق چندمتری از آب دریا، فشار پیمانه‌ای برابر با $۹/۵\times۱۰^۵\,Pa$ است؟ $\left(g = ۱۰\frac{N}{kg}\ ,\ \rho_{\text{آب}} = ۱\frac{g}{cm^۳}\right)$

پاسخ تشریحی:

فشار کل در عمق h از یک مایع برابر است با:

$$P_{\text{کل}} = \rho gh + P_\circ \Rightarrow P_{\text{کل}} - P_\circ = \rho gh \Rightarrow P_g = \rho gh$$

پس فشار پیمانه‌ای در عمق h همان فشار حاصل از مایع (ρgh) است. حال کافی است در این عبارت عددگذاری کنیم:

$$۹/۵\times۱۰^۵ = ۱۰۰۰\times۱۰\times h \Rightarrow h = ۹۵\,m$$

ماز

۶۰- درون لولهٔ بلند و قائمی، ۱۰cm جیوه ریخته شده است. اگر ۲۰cm آب درون لوله اضافه کنیم، فشار در ته لوله، ۲ درصد افزایش می‌یابد. فشار هوا در محل آزمایش چند کیلوپاسکال است؟ $\left(g = ۱۰\frac{N}{kg}\ ,\ \rho_{\text{جیوه}} = ۱۳/۶\frac{g}{cm^۳}\ ,\ \rho_{\text{آب}} = ۱\frac{g}{cm^۳}\right)$

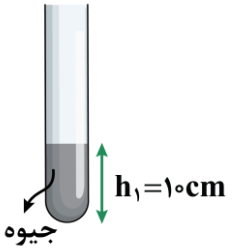
۱) ۸۶/۴ ۲) ۹۳/۲ ۳) ۱۰۱/۴ ۴) ۱۰۱/۸

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

پاسخ: گزینهٔ ۱ (سخت ـ محاسباتی ـ زمان‌بَر ـ صفحهٔ ۳۵ ـ ۱۰۰۲)

گام اول

فشار در ته لوله را که ناشی از جیوه و هوا است، در حالت اول به‌دست می‌آوریم.

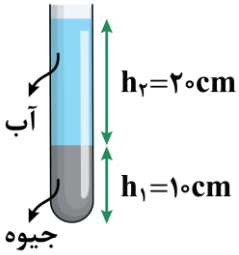


$$P_1 = P_0 + \rho_{جیوه} g h_1$$

$$P_1 = P_0 + ۱۳/۶ \times ۱۰^۳ \times ۱۰ \times ۰/۱ = P_0 + ۱۳۶۰۰$$

گام دوم

فشار در ته لوله را در حالت دوم به‌دست می‌آوریم.



$$P_2 = P_0 + \rho_{جیوه} g h_1 + \rho_{آب} g h_2$$

$$P_2 = P_0 + ۱۳۶۰۰ + ۱۰^۳ \times ۱۰ \times ۰/۲ = P_0 + ۱۵۶۰۰$$

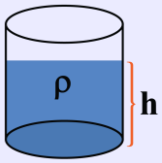
گام آخر

در حالت دوم فشار در ته لوله ۲ درصد بیش‌تر از حالت اول است؛ درنتیجه فشار در حالت دوم، ۱/۰۲ برابر فشار در حالت اول است.

$$\frac{P_2}{P_1} = ۱/۰۲ \Rightarrow \frac{P_0 + ۱۵۶۰۰}{P_0 + ۱۳۶۰۰} = ۱/۰۲ \Rightarrow P_0 + ۱۵۶۰۰ = ۱/۰۲ P_0 + ۱۳۸۷۲ \Rightarrow P_0 = ۸۶۴۰۰ Pa = ۸۶/۴ kPa$$

فشار در شاره‌ها

فشار یک ستون شاره به ارتفاع h (بدون درنظر گرفتن سایر فشارها) این‌گونه محاسبه می‌شود:



$$P = \rho g h$$

P: فشار یک ستون مایع با چگالی ρ و ارتفاع h

g: شتاب جاذبهٔ زمین

ρ: چگالی مایع

h: ارتفاع مایع

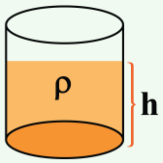
تبدیل یکاهای مربوط به فشار

$$cm \xrightarrow{\times ۱۰^{-۲}} m$$

$$\frac{kg}{L} = \frac{g}{cm^۳} \xrightarrow{\times ۱۰^{+۳}} \frac{kg}{m^۳} = \frac{g}{L}$$

نکتهٔ ۱

«فشار در هر نقطه از مایع برابر مجموع فشارهای بالای آن نقطه است.»

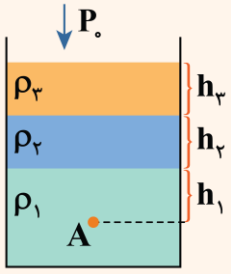


فشار در کف ظرف: $P = \rho g h + P_0$

فشار مایع در کف ظرف: $P = \rho g h$

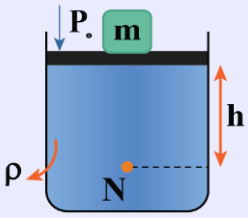
یه نمونهٔ باحال

اگر مانند شکل زیر، چند مایع مختلف درون ظرف باشند و فشار در نقطهٔ A مدنظر باشد $(\rho_1 > \rho_2 > \rho_3)$، باید فشار ناشی از تک‌تک مایع‌های بالای نقطهٔ A را با فشار هوا جمع کرد، یعنی:



$$P_A = P_1 + P_2 + P_3 + P_0 = \rho_1 g h_1 + \rho_2 g h_2 + \rho_3 g h_3 + P_0$$

اگر مانند شکل زیر، توسط پیستون بدون اصطکاکی سطح مایع مسدود شده باشد، با قرارگیری جسمی به جرم m روی پیستون، فشار کل در نقطه‌ای مانند N برابر خواهد شد با:



$$P_N = P_{\text{مایع}} + P_{\text{هوا}} + P_{\text{جامد}} \Rightarrow P_N = \rho gh + P_0 + \frac{mg}{A_{\text{پیستون}}}$$

از جرم پیستون صرف‌نظر شده است.

نکتهٔ ۲

نکتهٔ خیلی مهم: به ادبیات سؤال خیلی دقت کنید. سه نوع سؤال داریم:

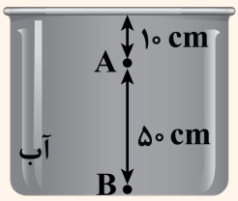
۱- اگر کلمهٔ **فشار** به‌تنهایی آمد یا گفته شد **فشار کل (مطلق)**، در این حالت باید تمام فشارهای بالای نقطهٔ موردنظر را جمع کنید.

۲- اگر در سؤال گفته شد فشار مایع، در این حالت فقط **فشار مایع** را حساب می‌کنیم و کاری به بقیهٔ فشارها ازجمله فشار هوا نداریم.

۳- اگر در صورت سؤال **فشار پیمانه‌ای** خواسته شد، باید کلیهٔ فشارها به‌جز فشار هوا را محاسبه کنیم.

یه نمونهٔ باحال

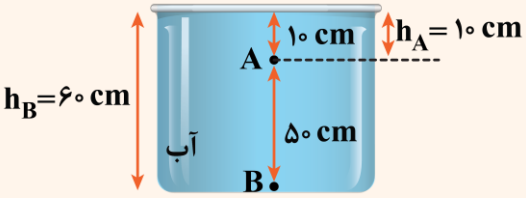
در شکل زیر، فشار در نقطهٔ B چند برابر فشار در نقطهٔ A می‌باشد؟ $(P_0 = ۹/۹\times۱۰^۴ \text{Pa} \ , \ \rho_{\text{آب}} = ۱\frac{g}{cm^۳} \ , \ g = ۱۰\frac{N}{kg})$



۱) $\frac{۵}{۴}$ ۲) $\frac{۶}{۵}$ ۳) $\frac{۲۰}{۱۹}$ ۴) $\frac{۲۱}{۲۰}$

پاسخ تشریحی:

فشار در هر نقطه از رابطهٔ $P = P_0 + \rho gh$ به‌دست می‌آید:



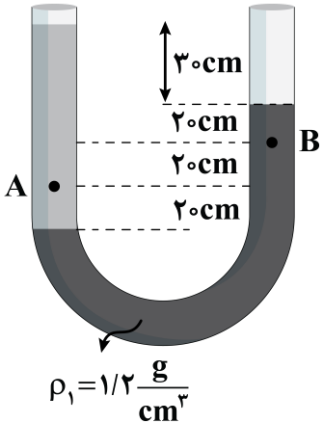
$$\begin{cases} P_A = P_0 + \rho gh_A \\ P_B = P_0 + \rho gh_B \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{P_B}{P_A} = \frac{(۹/۹\times۱۰^۴) + (۱۰^۳ \times ۱۰ \times ۶ \times ۱۰^{-۱})}{(۹/۹\times۱۰^۴) + (۱۰^۳ \times ۱۰ \times ۱۰^{-۱})} = \frac{\cancel{۱۰^۳}\,(۹۹+۶)}{\cancel{۱۰^۳}\,(۹۹+۱)}$$

$$\Rightarrow \frac{P_B}{P_A} = \frac{۱۰۵}{۱۰۰} = \frac{۲۱}{۲۰}$$

پاسخ: گزینهٔ ۴

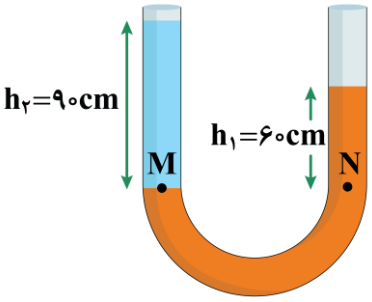
۶۱- در شکل زیر، دو مایع مخلوط‌نشدنی در لولهٔ U‌شکل در تعادل هستند. اگر فشار در دو نقطهٔ A و B به‌ترتیب P_A و P_B باشد، $P_A - P_B$ چند پاسکال است؟ $(g = ۱۰\frac{N}{kg})$



۱) −۸۰۰
۲) ۸۰۰
۳) −۳۲۰۰
۴) ۳۲۰۰

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۳۵ ـ ۱۰۰۲)

کام اول



فشار در دو نقطهٔ M و N باهم برابر است. در این مرحله می‌توانیم چگالی مایع (۲) را به‌دست آوریم.

$$P_M = P_N$$

$$P_0 + \rho_2 g h_2 = P_0 + \rho_1 g h_1$$

$$\rho_2 h_2 = \rho_1 h_1 \Rightarrow \rho_2 \times ۹۰ = ۱/۲ \times ۶۰ \Rightarrow \rho_2 = ۰/۸ \frac{g}{cm^3}$$

کام آخر

به کمک برابری فشار بین دو نقطهٔ M و N، اختلاف فشار بین نقطهٔ A و B را به‌دست می‌آوریم.

$$P_M = P_N$$

$$P_A + \rho_2 g(۰/۲) = P_B + \rho_1 g(۰/۴) \Rightarrow P_A - P_B = ۴\rho_1 - ۲\rho_2$$

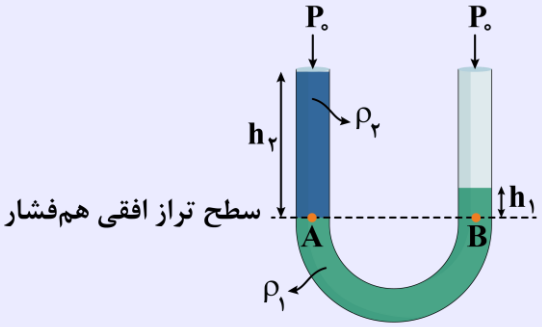
$$P_A - P_B = ۴(۱۲۰۰) - ۲(۸۰۰) = ۴۸۰۰ - ۱۶۰۰ = ۳۲۰۰ Pa$$

نکته

در رابطهٔ $\rho_1 h_1 = \rho_2 h_2$، نیازی به SI جایگذاری کردن کمیت‌ها نیست و کافی است یکای کمیت‌های مشابه، یکسان جایگذاری شود.

لوله‌های Uشکل

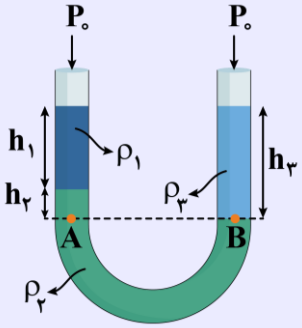
برای حل مسائل لوله‌های Uشکل، در سطح هر دو شاخه آن‌قدر به سمت پایین حرکت کنید تا به نقطه‌ای برسید که در هر دو شاخه یک مایع قرار داشته باشد. از مساوی قراردادن فشار این دو نقطه، خواستهٔ مسئله به‌دست می‌آید:



$$P_A = P_B$$

$$\Rightarrow \rho_2 g h_2 + P_0 = \rho_1 g h_1 + P_0$$

$$\Rightarrow \rho_2 h_2 = \rho_1 h_1$$



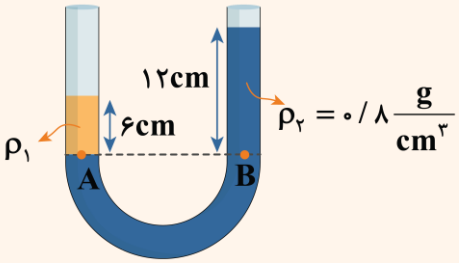
$$P_A = P_B$$

$$\Rightarrow P_0 + \rho_1 g h_1 + \rho_2 g h_2 = P_0 + \rho_3 g h_3$$

$$\Rightarrow \rho_1 h_1 + \rho_2 h_2 = \rho_3 h_3$$

یه نمونهٔ باحال

در لولهٔ U‌شکل مقابل، چگالی ρ_1 چند واحد SI است؟

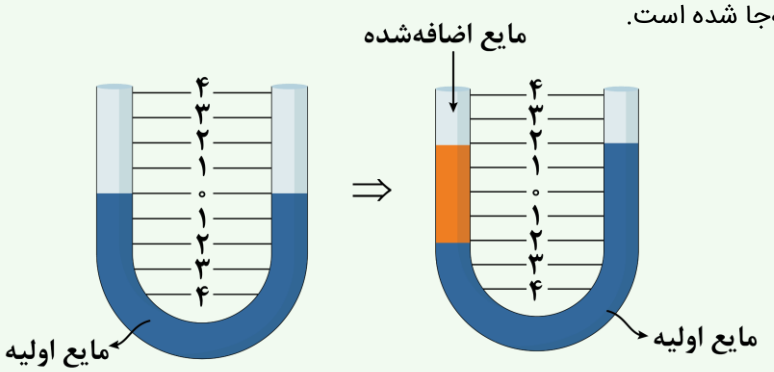


پاسخ تشریحی:

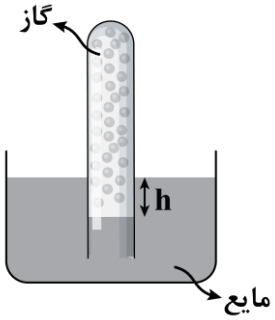
$$P_A = P_B$$
$$\Rightarrow \rho_1 h_1 = \rho_2 h_2$$
$$\Rightarrow \rho_1 \times ۶ = ۰/۸ \times ۱۲ \Rightarrow \rho_1 = ۱/۶ \frac{g}{cm^3} \Rightarrow \rho_1 = ۱۶۰۰ \frac{kg}{m^3}$$

نکته

هنگامی که در یک لولهٔ U‌شکل، سطح مقطع دو طرف یکسان است و به یکی از شاخه‌ها مایع دیگری اضافه کنیم سطح مایع در هر دو شاخه به یک اندازه جابه‌جا می‌شود. به‌عنوان مثال در شکل زیر با اضافه‌کردن مایع به شاخهٔ سمت چپ، اختلاف ارتفاع مایع اولیه در دو شاخه برابر ۴ cm خواهد شد. درحالی‌که سطح مایع در هر شاخه ۲ cm جابه‌جا شده است.



۶۲- در شکل زیر، فشار گاز جمع‌شده در انتهای لوله، ۸۱ سانتی‌متر جیوه است. اگر چگالی مایع درون ظرف، $۸/۵ \frac{g}{cm^3}$ باشد، اختلاف سطح مایع در لوله و ظرف (h) چند سانتی‌متر است؟ ($P_0 = ۷۶cmHg$ ، $\rho_{جیوه} = ۱۳/۶ \frac{g}{cm^3}$)



۱) ۶
۲) ۸
۳) ۱۰
۴) ۱۲

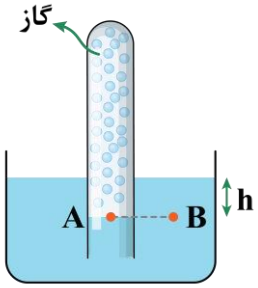
پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۳۸ ـ ۱۰۰۲)

راه نجات سریع

فشار رو در نقطهٔ مرز گاز و مایع با نقطهٔ هم‌ترازش برابر قرار بده و h رو حساب کن.

کلم اول

فشار در دو نقطهٔ هم‌تراز در یک مایع ساکن، برابر است (نقاط A و B).



$$P_A = P_B$$
$$P_{گاز} = \rho_{مایع} gh + P_0$$
$$۸۱cmHg = \rho_{مایع} gh + ۷۶cmHg$$
$$۵cmHg = \rho_{مایع} gh$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

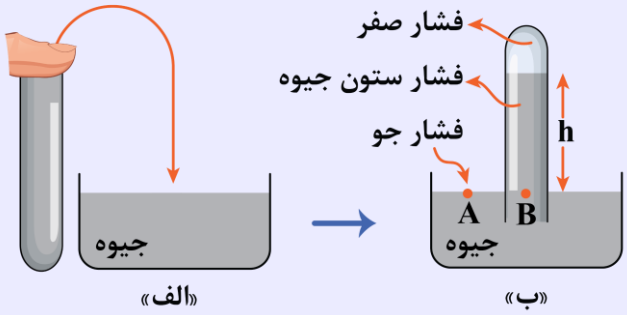
فشار ناشی از مایع برابر ۵cmHg است؛ بنابراین داریم:

$$\rho_{\text{مایع}}h_{\text{مایع}}=\rho_{\text{جیوه}}h_{\text{جیوه}}\Rightarrow ۸/۵\times h=۱۳/۶\times ۵\Rightarrow h=۸cm$$

فشارسنج هوا (بارومتر)

وسیله‌ای ساده که برای اندازه‌گیری فشار جو به‌کار می‌رود. این فشارسنج توسط توریچلی اختراع شد.

بارومتر شامل یک لولهٔ شیشه‌ای بلند (به‌طور تقریبی ۸۰ سانتی‌متر) با یک سر بسته است که از جیوه پر شده (شکل «الف») و سپس در یک ظرف محتوی جیوه به‌طور وارون قرار گرفته است (شکل «ب»). جیوه تا ارتفاعی بالا می‌رود که فشار ستون جیوه با فشار جو برابر شود. همچنین فضای خالی بالای ستون جیوه تنها محتوی بخار جیوه است که فشار آن ناچیز بوده و در عمل برابر صفر فرض می‌شود.



نکات

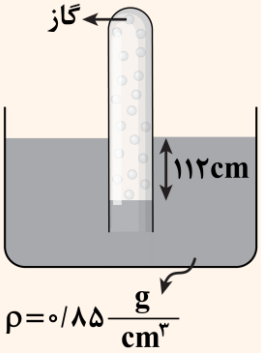
۱- فشار در نقطهٔ B برابر ρgh و در نقطهٔ A برابر $P_۰$ است. چون نقاط A و B هم‌فشارند، می‌توان نوشت:

$$P_A=P_B\Rightarrow P_۰=۰+\rho gh\Rightarrow P_۰=\rho gh$$

۲- ارتفاع ستون جیوه در سطح دریاهای آزاد ۷۶۰mm است.

یه نمونهٔ باحال

شکل زیر، بارومتری را نشان می‌دهد که درحال تعادل است و فشار گاز محبوس در لوله ۸۳cmHg است. فشار هوای محیط چند سانتی‌متر جیوه است؟ $(\rho_{\text{جیوه}}=۱۳/۶\frac{g}{cm^۳})$



۱) ۹۰

۲) ۸۹

۳) ۷۵

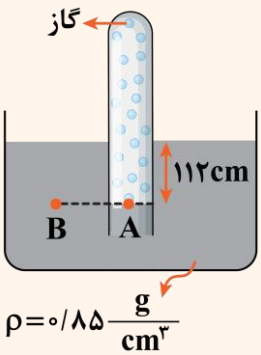
۴) ۷۶

پاسخ تشریحی:

ابتدا فشار ستون مایع به ارتفاع ۱۱۲cm را برحسب سانتی‌متر جیوه محاسبه می‌کنیم:

$$\rho_{\text{مایع}}gh_{\text{مایع}}=\rho_{\text{جیوه}}gh_{\text{جیوه}}\Rightarrow ۰/۸۵\times ۱۱۲=۱۳/۶h_{\text{جیوه}}\Rightarrow h_{\text{جیوه}}=۷cm\Rightarrow P_{\text{مایع}}=۷cmHg$$

با برابر قراردادن فشار نقاط A و B داریم:



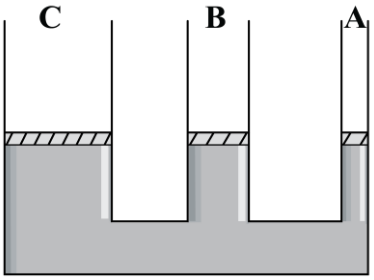
$$P_A=P_B\Rightarrow P_{\text{گاز}}=P_۰+۷cmHg$$

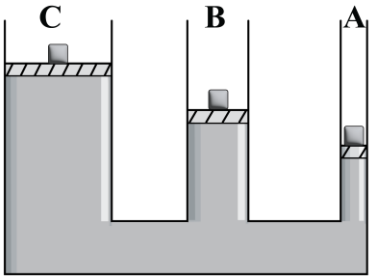
$$\Rightarrow ۸۳=P_۰+۷cmHg\Rightarrow P_۰=۷۶cmHg$$

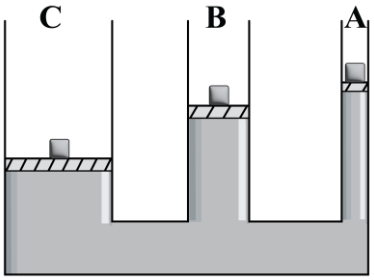
پاسخ: گزینهٔ ۴

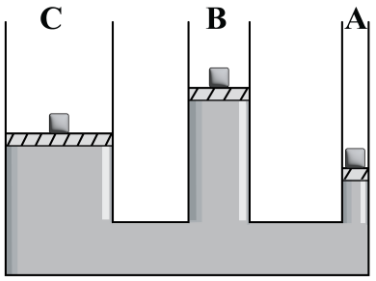
SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

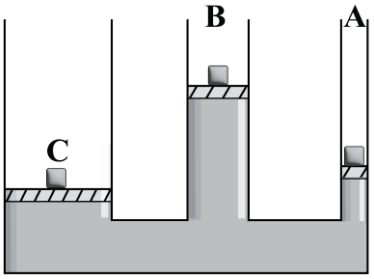
۶۳- در شکل زیر، سه پیستون A، B و C، بدون اصطکاک هستند و روی آب در حالت تعادل و در ارتفاع یکسان h قرار دارند. روی پیستون‌ها وزنه‌هایی با جرم یکسان قرار می‌دهیم، اگر دوباره پیستون‌ها به حالت تعادل برسند، کدام‌یک از شکل‌های زیر، چگونگی قرارگیری مایع و پیستون‌ها را به‌درستی نشان می‌دهد؟



(۱)


(۲)


(۳)


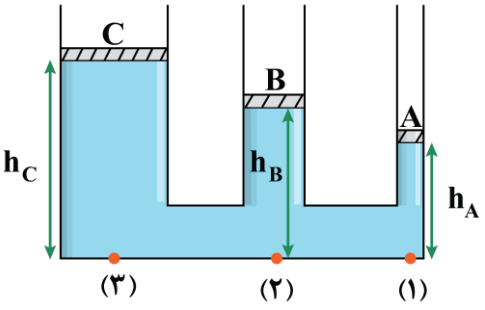
(۴)


پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ مفهومی ـ سریع ـ صفحهٔ ۳۵ ـ ۱۰۰۲)

نکته

به‌ازای وزنه‌های یکسان، پیستون با سطح مقطع باریک‌تر، فشار بیش‌تری به مایع وارد می‌کند.

روش اول



وقتی روی پیستون یک وزنه قرار دهیم، فشاری که ایجاد می‌کند برابر با $P = \frac{mg}{A}$ است.

جرم هر سه وزنه یکسان است؛ پس فشار با مساحت سطح رابطهٔ عکس دارد و پیستون با سطح مقطع کوچک‌تر (پیستون A) فشار بیش‌تری ایجاد می‌کند و باعث می‌شود آب زیر آن بیش‌تر پایین برود و ارتفاع آب در آن ستون کم‌تر شود:

$$h_A < h_B < h_C$$

روش دوم

می‌توان در کف ظرف، سه نقطهٔ هم‌تراز درنظر گرفت و با برابر قرار دادن فشار آن‌ها نتیجه‌گیری کرد:

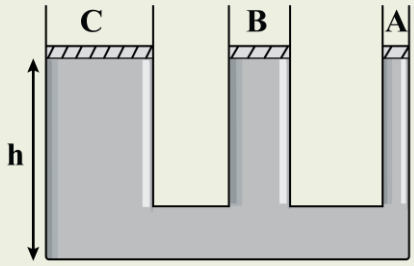
$$P_۱ = P_۲ = P_۳ \Rightarrow \rho g h_A + \frac{mg}{A_A} = \rho g h_B + \frac{mg}{A_B} = \rho g h_C + \frac{mg}{A_C}$$

برای مساوی شدن این تساوی باید هرکدام که مساحت کوچک‌تری داشته باشد، h کوچک‌تری هم داشته باشد.

$$A_A < A_B < A_C \Rightarrow h_A < h_B < h_C$$

آزمون سراسری ریاضی اردیبهشت‌ماه ۱۴۰۳

۷۲- در شکل زیر، سه پیستون A، B و C، بدون اصطکاک هستند و روی آب در حالت تعادل و در ارتفاع یکسان h قرار دارند. روی پیستون‌ها وزنه‌هایی با جرم یکسان قرار می‌دهیم، اگر دوباره پیستون‌ها به حالت تعادل برسند و ارتفاع ستون‌های مایع به‌ترتیب h_A، h_B و h_C باشد، کدام رابطه درست است؟



۱) $h_C > h_B > h_A$

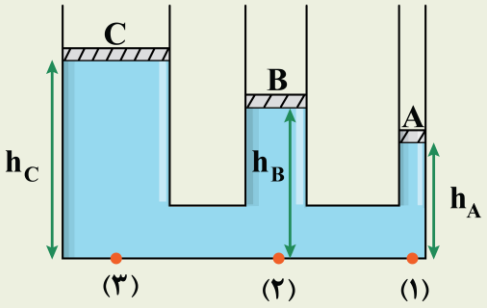
۲) $h_C < h_B < h_A$

۳) $h_C = h_B = h_A$

۴) $h_C + h_B + h_A = 3h$

پاسخ تشریحی:

وقتی روی پیستون یک وزنه قرار دهیم فشاری که تولید می‌کند برابر با $P = \frac{mg}{A}$ است چون جرم هر سه وزنه یکسان است، پس فشار با سطح رابطهٔ عکس برقرار می‌کند و پیستون با سطح مقطع کوچک‌تر (پیستون A) فشار بیشتری تولید می‌کند و باعث می‌شود آب زیر آن بیشتر پایین برود و ارتفاع آب در آن ستون کمتر شود:



$$h_A < h_B < h_C$$

می‌توان در کف ظرف، سه نقطهٔ هم‌تراز در نظر گرفت و با برابر قراردادن فشار آن‌ها نتیجه‌گیری کرد:

$$P_1 = P_2 = P_3 \Rightarrow \rho g h_{A\downarrow} + \frac{mg}{\downarrow A_A} = \rho g h_B + \frac{mg}{A_B} = \rho g h_C + \frac{mg}{A_C}$$

برای مساوی‌شدن این تساوی باید هر کدام که A کوچک‌تری داشته باشد h کوچک‌تری هم داشته باشد.

$$A_A < A_B < A_C \Rightarrow h_A < h_B < h_C$$

پاسخ: گزینهٔ ۱

۶۴- کدام‌یک از جسم‌های زیر، روی آب دریا با چگالی $1/04 \frac{g}{cm^3}$ شناور می‌ماند؟

الف: جسمی توپر به جرم ۲kg و حجم $400cm^3$

ب: کره‌ای توپر به شعاع ۱۰cm و جرم ۲kg

۱) فقط «الف»
۲) فقط «ب»
۳) «الف» و «ب»
۴) هیچ‌کدام

پاسخ: گزینهٔ ۲ (آسان ـ مفهومی / محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۴۲ ـ ۱۰۰۲)

راه نجات سریع

چگالی هر دو جسم رو حساب کن. اونی که کم‌تر از چگالی مایع باشه، شناور می‌مونه.

گام اول

چگالی هر جسم را به‌دست می‌آوریم:

الف

$$\rho_1 = \frac{m_1}{V_1} = \frac{2000}{400} = 5 \frac{g}{cm^3}$$

ب

$$\rho_۲ = \frac{m_۲}{V_۲} = \frac{m_۲}{\frac{۴}{۳}\pi r^۳} = \frac{۲۰۰۰}{\frac{۴}{۳}\pi \times ۱۰^۳} = \frac{۱/۵}{\pi}\frac{g}{cm^۳}$$

$$\xrightarrow{\pi > ۳} \rho_۲ < ۱\frac{g}{cm^۳}$$

کلام آخر

چگالی جسم «الف» بیش‌تر از چگالی آب دریا و چگالی جسم «ب» کم‌تر از چگالی آب دریاست؛ بنابراین فقط جسم «ب» روی آب شناور می‌ماند.

نیروی شناوری

نیروی شناوری، نیرویی همواره رو به بالا است که از طرف شاره بر جسمی که درون آن قرار دارد، وارد می‌شود. این نیرو را با $\vec{F}_b$ نمایش می‌دهند. زمانی که جسمی به وزن W را به درون شاره‌ای فرو برده و رها کنیم، سه حالت برای آن می‌تواند رخ دهد:

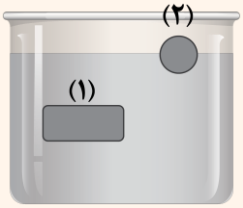
۱- چنان‌چه $F_b < W$ باشد: جسم به پایین رفته و در ته ظرف ته‌نشین می‌شود، در این حالت $\rho_{جسم} > \rho_{مایع}$ است.

۲- چنان‌چه $F_b = W$ باشد: جسم در همان نقطهٔ رهاشده، غوطه‌ور باقی می‌ماند، در این حالت $\rho_{جسم} = \rho_{مایع}$ است.

۳- چنان‌چه $F_b > W$ باشد: جسم به بالا آمده و درنهایت زمانی که $F_b = W$ شد، روی سطح شاره، شناور می‌شود، در این حالت $\rho_{جسم} < \rho_{مایع}$ است.

یه نمونهٔ باحال

جسم‌های (۱) و (۲) را درون یک مایع فرو برده و رها کرده‌ایم و درنهایت وضعیت دو جسم مطابق شکل زیر شده است. اگر اندازهٔ نیروی شناوری وارد بر این دو جسم در این حالت به‌ترتیب $F_{b(۱)}$ و $F_{b(۲)}$ و چگالی آن‌ها به‌ترتیب $\rho_۱$ و $\rho_۲$ باشد، کدام گزینه درست است؟ (دو جسم، هم‌وزن هستند.)



۱) $\rho_۱ = \rho_۲ \ , \ F_{b(۱)} = F_{b(۲)}$

۲) $\rho_۱ > \rho_۲ \ , \ F_{b(۱)} = F_{b(۲)}$

۳) $\rho_۱ > \rho_۲ \ , \ F_{b(۲)} > F_{b(۱)}$

۴) $\rho_۱ = \rho_۲ \ , \ F_{b(۲)} > F_{b(۱)}$

پاسخ تشریحی:

جسم (۱) درون مایع، غوطه‌ور شده است؛ پس:

$$F_{b(۱)} = W \quad (۱)$$

$$\rho_۱ = \rho_{مایع} \quad (۲)$$

جسم (۲) روی سطح مایع، شناور است؛ پس:

$$F_{b(۲)} = W \quad (۳)$$

$$\rho_۲ < \rho_{مایع} \quad (۴)$$

از ترکیب نتایج (۱) و (۳) می‌توان نوشت:

$$F_{b(۱)} = F_{b(۲)}$$

و از ترکیب نتایج (۲) و (۴) می‌توان نوشت:

$$\rho_۱ > \rho_۲$$

پاسخ: گزینهٔ ۲

۶۵- **براثر رسوبات در یک لوله‌ای افقی، قطر قسمتی از این لوله نسبت به سایر قسمت‌ها ۶۰ درصد کاهش یافته است. اگر آب از این قسمت وارد قسمت پهن لوله شود، تندی آن چگونه تغییر می‌کند؟**

۱) ۱۶ درصد کاهش می‌یابد.
۲) ۳۶ درصد افزایش می‌یابد.
۳) ۸۴ درصد کاهش می‌یابد.
۴) ۴۰ درصد کاهش می‌یابد.

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۴۵ ـ ۱۰۲)

با توجه به معادلهٔ پیوستگی $(A_1v_1 = A_2v_2)$، می‌توان نوشت:

$$D_1 = D_2 - \frac{60}{100}D_2 = \frac{40}{100}D_2 = \frac{4}{10}D_2 \Rightarrow \frac{D_1}{D_2} = \frac{4}{10}$$

$$A_1v_1 = A_2v_2 \Rightarrow \frac{v_2}{v_1} = \frac{A_1}{A_2} \xrightarrow{A=\frac{\pi D^2}{4}} \frac{v_2}{v_1} = (\frac{D_1}{D_2})^2 = (\frac{4}{10})^2 = \frac{16}{100}$$

$$\Rightarrow \text{درصد تغییر تندی} = \frac{v_2 - v_1}{v_1} \times 100 = \frac{0/16v_1 - v_1}{v_1} \times 100 = -84\,\%$$

بنابراین تندی حرکت آب با ورود از بخش باریک به بخش پهن به‌اندازهٔ ۸۴ درصد کاهش می‌یابد.

آهنگ شارش حجمی و معادلهٔ پیوستگی

اگر فرض کنیم مایعی در یک لوله درحال حرکت باشد، آهنگ شارش حجمی این مایع به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\text{آهنگ شارش حجمی} = \frac{\text{حجم مایع}}{\text{زمان}} = Av$$

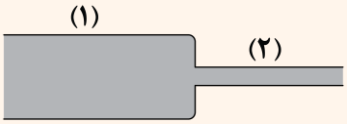
که A و v به‌ترتیب سطح مقطع و تندی شاره است.

چنان‌چه شارهٔ تراکم‌ناپذیر، جریانی لایه‌ای داشته و فاقد اصطکاک با دیوارهٔ لوله باشد، آهنگ شارش حجمی در تمام قسمت‌های مختلف لوله یکسان و ثابت بوده و طبق معادله‌ای به نام معادلهٔ پیوستگی، می‌توان چنین نوشت:

$$A_1v_1 = A_2v_2$$

یه نمونه باحال

در شکل زیر، آب درون لوله به‌طور پیوسته جاری است. اگر قطر قسمت (۱) سه برابر قطر قسمت (۲) و تندی آب در قسمت (۲) معادل $13/5\,\frac{cm}{s}$ باشد، تندی آب در قسمت (۱) چند سانتی‌متر بر ثانیه خواهد بود؟



پاسخ تشریحی:

طبق معادلهٔ پیوستگی داریم:

$$A_1v_1 = A_2v_2 \xrightarrow[A_1=9A_2]{A=\frac{\pi}{4}d^2,\, d_1=3d_2} v_2 = 9v_1 \Rightarrow 13/5 = 9v_1 \Rightarrow v_1 = 1/5\,\frac{cm}{s}$$

بودجه‌بندی این آزمون

شیمی دوازدهم: مولکول‌ها در خدمت تندرستی: از ابتدای فصل تا ابتدای بحث pH | صفحه‌های ۱ تا ۲۴
شیمی پایه: کیهان، زادگاه الفبای هستی | صفحه‌های ۱۹ تا ۴۶

سهم در کنکور

این آزمون در مجموع ۳ الی ۴ تست از ۳۰ تستِ کنکور را پوشش داده است.

سلام به مازی‌های عزیز

امیدوارم که حالتون خوب باشه و از این آزمون، نتیجه خیلی خوبی رو گرفته باشین. تا به اینجای کار، در فصل اول شیمی دوازدهم با مطالب مربوط به **پاک‌کننده‌ها** و مطالب مقدماتی **اسید** و **باز** آشنا شدیم. در ادامه، با بحث pH و مطالب مربوط به اون آشنا خواهید شد. بچه‌ها، دقت کنید که **مبحث pH**، بخش گسترده‌ای از سؤالات اسید و باز در کنکور و امتحان نهایی رو تشکیل می‌دن و تا جایی که از دستتون برمیاد، باید سعی کنید سؤالات متنوعی رو از این قسمت حل کنید. مهم‌ترین تیترهای بحث pH رو اینجا براتون می‌نویسم:

۱. تبدیل غلظت یون هیدروژن به pH و برعکس
۲. محاسبه pH به کمک ثابت یونش اسید
۳. محاسبه pH محلول اسید قوی و ضعیف
۴. محاسبه pH محلول باز قوی و ضعیف
۵. تغییر غلظت محلول‌های اسیدی و بازی
۶. واکنش خنثی شدن اسید و باز

بچه‌ها، دقت کنید که بعد از هر آزمون، مستقل از اینکه نتیجه اون آزمون خوب شده یا بد، باید سعی کنید آزمون خودتون رو خیلی دقیق تحلیل کنید. توی مراحل تحلیل آزمون، اول باید سعی کنید اشکالات خودتون رو پیدا کنید و اگر مطلبی رو خوب یاد نگرفتین، برید روی اون مطلب وقت بذارین. بعد از این، باید سعی کنید استراتژی آزمون دادن خودتون رو به مرور اصلاح کنید تا به مرور، نتیجه بهتری بگیرید.

مراقب باشید که در طول سال کنکور، نتیجه آزمون‌های اولی که می‌دین اصلاً مهم نیست و این روند پیشروی شماست که اهمیت داره. دانش‌آموزی که دست از تلاش کردن برنمیداره، قطعاً در طول سال تحصیلی پیشرفت می‌کنه و به مرور، نتایج بهتری رو به‌دست میاره.

موفق باشید.

دکتر فرشاد هادیان‌فرد ـ مسئول درس آزمون‌های تستی شیمی پایهٔ دوازدهم

۶۶- کدام موارد از مطالب زیر درست هستند؟

الف ـ شاخص امید به زندگی به عوامل گوناگونی بستگی داشته و مقدار آن در مناطق برخوردار جهان در حال افزایش است.
ب ـ اتیلن‌گلیکول، در محلول ضدیخ وجود داشته و در ساختار هر مولکول آن، ۹ پیوند اشتراکی بین اتم‌ها وجود دارد.
ج ـ در گذر زمان، احتمال همه‌گیری وبا کاهش یافته و این بیماری، نمی‌تواند برای جوامع امروزی تهدیدکننده باشد.
د ـ صابون‌های مایع را از گرم کردن مخلوط روغن‌های مایع مثل روغن زیتون با سدیم هیدروکسید تهیه می‌کنند.

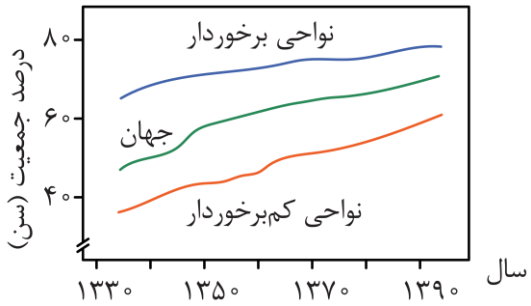
۱) «الف» و «ب»　　۲) «ب» و «ج»　　۳) «ج» و «د»　　۴) «الف» و «د»

پاسخ: گزینهٔ ۱　　**(متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۶ ـ ۱۲۰۱)**

عبارت‌های (الف) و (ب) درست هستند.

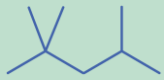
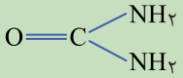
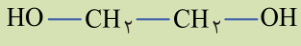
بررسی موارد:

الف) شاخص امید به زندگی نشان می‌دهد با توجه به خطراتی که انسان‌ها در طول زندگی با آن مواجه هستند، به‌طور میانگین چند سال در این جهان زندگی می‌کنند. امید به زندگی شاخصی است که در کشورهای گوناگون و حتی در شهرهای یک کشور نیز با هم تفاوت دارد. شاخص امید به زندگی به عوامل گوناگونی بستگی داشته و مقدار آن در مناطق کم برخوردار جهان، همانند مناطق برخوردار جهان، رو به افزایش یافتن است. نمودار زیر، روند تغییر شاخص امید به زندگی را در مناطق مختلف جهان نشان می‌دهد:



با توجه به نمودار، در طول ۶۰ سال اخیر، میزان امید به زندگی هم برای مناطق برخوردار جهان و هم برای مناطق کم‌برخوردار جهان افزایش پیدا کرده است. هر چند که میزان این افزایش برای مناطق کم‌برخوردار، بیشتر از مناطق برخوردار بوده است، اما هنوز هم میزان امید به زندگی در نواحی برخوردار جهان در حدود ۲۰ سال بیشتر از مناطق کم‌برخوردار است.

ب) اتیلن‌گلیکول، یک الکل دوعاملی است که به‌عنوان ضدیخ کاربرد دارد. در هر مولکول از این ماده، ۹ پیوند اشتراکی بین اتم‌ها برقرار شده است. جدول زیر، اطلاعات مربوط به اوره، بنزین و اتیلن‌گلیکول را نشان می‌دهد:

نام ماده	فرمول شیمیایی	نوع ماده	حلال مناسب	ساختار
بنزین	C_8H_{18}	مولکول ناقطبی	حلال ناقطبی (هگزان)	
اوره	$CO(NH_2)_2$	مولکول قطبی	حلال قطبی (آب)	
اتیلن گلیکول	$HOCH_2CH_2OH$	مولکول قطبی	حلال قطبی (آب)	

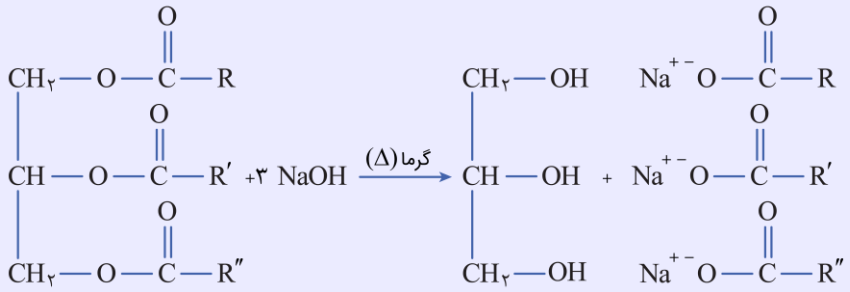
ج) بیماری وبا که یک بیماری واگیردار است، به دلیل آلوده‌شدن آب‌ها و نبودن بهداشت در جامعه، بارها در جهان همه‌گیر شده و جان میلیون‌ها انسان را گرفته است. در طول زمان، استفاده از صابون و توجه به نظافت و بهداشت در جامعه گسترش یافت و سبب شد تا مقدار آلودگی‌ها، میکروب‌ها و عوامل بیماری‌زا در محیط‌های فردی و همگانی کاهش یافته و سطح بهداشت جامعه افزایش پیدا کند. بر این اساس، می‌توان گفت احتمال بروز وبا در طول زمان کاهش یافته است. البته، توجه داریم که این بیماری هنوز هم می‌تواند برای هر جامعه‌ای تهدیدکننده باشد. ساده‌ترین و مؤثرترین راه پیشگیری از این بیماری، **رعایت بهداشت فردی** و **همگانی** است.

د) حالت فیزیکی صابون‌ها، ربطی به حالت فیزیکی مواد مصرف شده برای تولید آن‌ها نداشته و وابسته به نوع کاتیون موجود در ساختار آن‌ها است. در واقع، صابون جامد را از گرم کردن مخلوط روغن‌های گوناگون (استرهای سنگینی که حالت مایع دارند) یا چربی (استرهای سنگینی که حالت جامد دارند) مانند روغن زیتون، نارگیل و پیه با سدیم هیدروکسید تهیه می‌کنند. صابون‌های مایع نیز **نمک پتاسیم** یا **آمونیوم اسیدهای چرب** هستند.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

واکنش صابونی‌شدن

صابون‌های جامد را بر اثر گرما دادن روغن‌های گیاهی یا چربی‌های جانوری مانند روغن زیتون، روغن نارگیل، دنبه و پیه گوسفند در حضور سدیم هیدروکسید ($NaOH$) تهیه می‌کنند. به این فرایند، واکنش صابونی‌شدن گفته می‌شود. داریم:



برای به‌دست آوردن فرمول شیمیایی صابون حاصل از مصرف یک استر سنگین، از رابطه زیر استفاده می‌شود:

$$\text{فرمول شیمیایی صابون تولید شده} = \frac{\text{فرمول شیمیایی استر سنگین} - C_3H_5 + 3Na}{3}$$

توجه داریم که صابون‌ها را از واکنش میان اسیدهای چرب با محلول سدیم هیدروکسید نیز می‌توان به‌دست آورد.

ماز

۶۷- کدام‌یک از مطالب زیر، نادرست است؟

۱) شربت معده، نمونه‌ای از مخلوط‌های ناپایدار بوده و مسیر حرکت نور در یک نمونه از آن مشخص است.

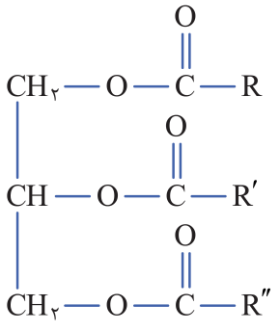
۲) آنیون صابون حاصل از واکنش روغن زیتون ($C_{57}H_{101.4}O_6$) با محلول سود، زنجیر هیدروکربنی سیرشده دارد.

۳) در ساختار پاک‌کننده‌های غیرصابونی، حداقل دو اتم کربن وجود دارد که به هیچ اتم هیدروژنی متصل نشده‌اند.

۴) جوهر نمک، همانند انواع سفیدکننده‌ها، علاوه بر ایجاد برهم‌کنش، با آلاینده‌های موجود در محیط نیز واکنش می‌دهد.

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۱۲ ـ ۱۲۰۱)

ساختار کلی استرهای سنگین سه عاملی به‌صورت زیر است:



فرمول عمومی استر بلند زنجیر سه عاملی سیرشده، به‌صورت $C_nH_{2n-4}O_6$ است، پس فرمول نوعی استر سنگین با ۵۷ اتم کربن به‌صورت $C_{57}H_{110}O_6$ است. روغن زیتون، نسبت به استر سیرشده مورد نظر ۶ اتم هیدروژن کمتر دارد. بر این اساس، در مولکول روغن زیتون تعداد $\frac{110-104}{2} = 3$ پیوند $C = C$ و در نتیجه در هر اسید چرب سازنده مولکول روغن زیتون یک پیوند $C = C$ وجود دارد. با توجه به توضیحات داده‌شده، می‌توان گفت در بخش آنیونی صابون تولید شده از روغن زیتون، دو پیوند دوگانه (یک پیوند $C = C$ و یک پیوند $C = O$) وجود دارد و زنجیر هیدروکربنی آن سیر نشده است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) جدول زیر، برخی از ویژگی‌های کلوئیدها و مخلوط‌های همگن و ناهمگن را در مقایسه با یکدیگر نشان می‌دهد:

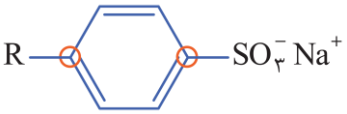
ویژگی	مخلوط ناهمگن (سوسپانسیون)	کلوئید	مخلوط همگن (محلول)
عبور نور	نور را پخش می‌کند.	نور را پخش می‌کند.	نور را عبور می‌دهد.
ظاهر	ناهمگن	همگن	همگن
همگن بودن	ناهمگن	ناهمگن	همگن
پایداری	ناپایدار است.	پایدار است.	پایدار است.
نوع ذره	ذره‌ها و قطعات مجزا	مولکول‌های بزرگ یا توده‌های مولکولی	یون‌ها یا مولکول‌ها

شربت معده، نوعی **سوسپانسیون** است. سوسپانسیون‌ها نمونه‌ای از مخلوط‌های **ناپایدار** بوده و مسیر حرکت نور در یک نمونه از آن‌ها مشخص است.

شربت معده

با ورود غذا به معده انسان، غدد موجود در دیوارهٔ معده برای از بین بردن میکروب‌های موجود در غذاها و فعال کردن آنزیم‌های گوارشی، شروع به ترشح هیدروکلریک اسید می‌کنند. در بدن انسان بالغ، روزانه بین ۲ تا ۳ لیتر شیره معده تولید می‌شود که غلظت یون هیدرونیوم در آن حدوداً برابر ۰/۰۳ مول بر لیتر است. به همین خاطر، فضای درون معده را می‌توان یک محیط اسیدی به حساب آورد؛ به‌طوری‌که این اسید حتی می‌تواند فلز روی را در خود حل کند. دیواره داخلی معده، به‌طور طبیعی مقدار اندکی از یون‌های هیدرونیوم ترشح شده را مجدداً جذب می‌کند. این فرایند، سبب نابودی برخی از سلول‌های سازندهٔ دیوارهٔ معده می‌شود. برای مقابله با خاصیت اسیدی محتویات معده، می‌توان از داروهایی به نام ضد اسیدهای معده‌ای استفاده کرد. این داروها، به شربت معده معروف بوده و شامل یک یا چند ماده مؤثر که عبارت‌اند از منیزیم هیدروکسید ($Mg(OH)_2$)، آلومینیم هیدروکسید ($Al(OH)_3$) و سدیم هیدروژن کربنات (جوش شیرین یا $NaHCO_3$) می‌شوند. همه مواد مؤثر به کار رفته در ضد اسیدها خاصیت بازی دارند.

۳) در پاک‌کننده‌های غیرصابونی، دو اتم کربن در حلقه بنزنی که به گروه آلکیل و گروه SO_3^- متصل شده‌اند، به هیچ اتم هیدروژنی متصل نیستند. توجه داریم که در گروه R نیز، با توجه به سیرشده بودن و یا نبودن این قسمت، می‌تواند اتم کربنی وجود داشته باشد که به هیچ اتم هیدروژنی متصل نیست. ساختار کلی پاک‌کننده‌های غیرصابونی به‌صورت زیر است:

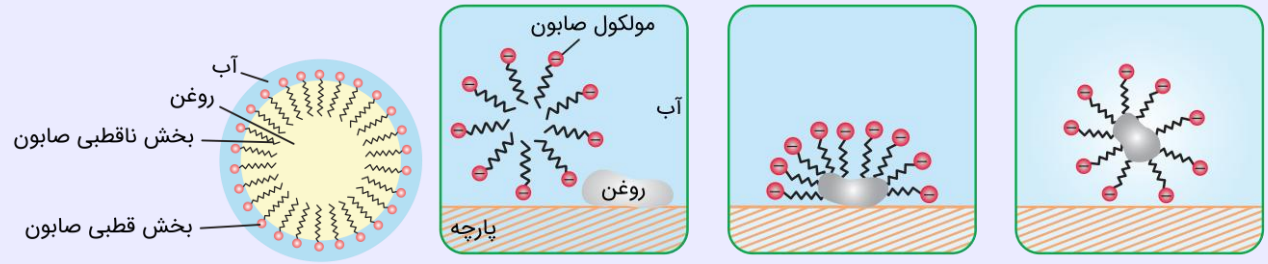


۴) پاک‌کننده‌های صابونی و غیرصابونی، با مولکول‌ها و ذرات سازنده آلودگی‌ها وارد واکنش شیمیایی نشده و فقط براساس برهم‌کنش‌های بین ذره‌ای، سبب پاک‌شدن آلودگی‌ها می‌شوند. گروه دیگری از پاک‌کننده‌ها نیز وجود دارند که با ذرات سازندهٔ آلودگی‌ها وارد واکنش شیمیایی شده و در کنار برهم‌کنش‌های بین ذره‌ای، از این طریق نیز سبب پاک‌شدن آلودگی‌ها می‌شوند. به این دسته از انواع شوینده‌ها، به‌اصطلاح **پاک‌کننده‌های خورنده** گفته می‌شود. در هنگام استفاده از این مواد، شوینده موردنظر با آلودگی‌ها وارد واکنش شده و آن‌ها را به مواد محلول در آب تبدیل می‌کند. سفیدکننده‌ها، جوهر نمک و محلول سود، انواعی از پاک‌کننده‌های خورنده هستند.

مکانیسم عمل پاک‌کننده‌ها

پاک‌کننده‌ها بر اساس مکانیسم عملکرد خود به دو دسته پاک‌کننده‌های کلوئیدساز و خورنده تقسیم می‌شوند. در این رابطه، داریم:

۱) پاک‌کننده‌های کلوئیدساز که شامل صابون و پاک‌کننده غیرصابونی هستند، از دو بخش قطبی و غیرقطبی تشکیل‌شده‌اند. این پاک‌کننده‌ها از سمت‌های بخش قطبی با مولکول‌های آب و از سمت بخش ناقطبی با مولکول‌های چربی یا روغن جاذبه برقرار می‌کنند. در این حالت قطرات چربی به‌صورت توده مولکولی درآمده و اطراف آن‌ها را پاک‌کننده‌ها می‌پوشانند. در این حالت، ذرات پاک‌کننده به گونه‌ای قرار می‌گیرند که سمت ناقطبی آن‌ها به سمت داخل (توده چربی) و سمت قطبی آن‌ها به سمت بیرون (آب) است. در این رابطه، داریم:



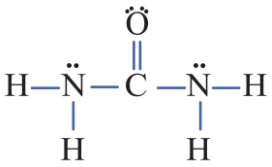
۲) پاک‌کننده‌های خورنده شامل مواد اسیدی یا بازی هستند که علاوه بر داشتن برهم‌کنش فیزیکی با آلاینده‌ها، با آن‌ها واکنش شیمیایی نیز می‌دهند و آن‌ها را به مواد محلول در آب تبدیل می‌کنند. مواد محلول ایجاد شده طی این فرایند، از محل لکه شسته خواهند شد.

۶۸- نمونه‌هایی به جرم برابر از اوره و گلوکز را در مقداری آب حل کرده و حجم محلول مورد نظر را به ۲۰ لیتر می‌رسانیم. غلظت مولی اوره در محلول ایجاد شده، چند برابر غلظت مولی گلوکز می‌شود؟ ($g.mol^{-1}$: $H=1, C=12, N=14, O=16$)

۱) ۱/۵ ۲) ۲ ۳) ۲/۵ ۴) ۳

پاسخ: گزینهٔ ۴ (آسان ـ محاسباتی ـ سریع ـ صفحهٔ ۴ ـ ۱۴۰۱)

شکل زیر، ساختار اوره را نشان می‌دهد:



جرم مولی اوره با فرمول شیمیایی $CO(NH_2)_2$، برابر با ۶۰ گرم بر مول بوده و جرم مولی گلوکز با فرمول شیمیایی $C_6H_{12}O_6$، برابر با ۱۸۰ گرم بر مول است. این دو ماده، از ذرات قطبی ساخته شده و محلول در آب هستند. فرض می‌گیریم که یک نمونه x گرمی از هر ماده در اختیار داریم. بر این اساس، ابتدا مقدار مول و سپس غلظت هر ماده در محلول ۲۰ لیتری را محاسبه می‌کنیم. در رابطه با اوره، داریم:

$$?\,mol\ CO(NH_2)_2 = x\ g\ CO(NH_2)_2 \times \frac{1\ mol\ CO(NH_2)_2}{60\ g\ CO(NH_2)_2} = \frac{x}{60}\ mol$$

$$\text{غلظت مولی } CO(NH_2)_2 = \frac{\text{مول } CO(NH_2)_2}{\text{لیتر محلول}} = \frac{\frac{x}{60}\ mol}{20\ L} = \frac{x}{1200}\ mol.L^{-1}$$

در رابطه با گلوکز، داریم:

$$?\,mol\ C_6H_{12}O_6 = x\ g\ C_6H_{12}O_6 \times \frac{1\ mol\ C_6H_{12}O_6}{180\ g\ C_6H_{12}O_6} = \frac{x}{180}\ mol$$

$$\text{غلظت مولی } C_6H_{12}O_6 = \frac{\text{مول } C_6H_{12}O_6}{\text{لیتر محلول}} = \frac{\frac{x}{180}\ mol}{20\ L} = \frac{x}{3600}\ mol.L^{-1}$$

در قدم آخر، نسبت غلظت مولی اوره به غلظت مولی گلوکز را در محلول ایجاد شده محاسبه می‌کنیم:

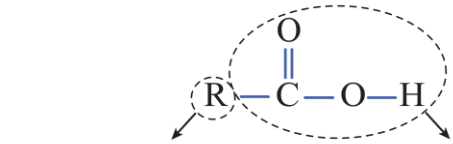
$$\frac{\text{غلظت مولی } CO(NH_2)_2}{\text{غلظت مولی } C_6H_{12}O_6} = \frac{\frac{x}{1200}}{\frac{x}{3600}} = 3$$

۶۹- بر اثر سوزاندن کامل ۲۱ گرم از یک اسید چرب یک عاملی که در زنجیر هیدروکربنی آن یک پیوند سه‌گانه وجود دارد، ۲۹/۱۲ لیتر گاز کربن‌دی‌اکسید در شرایط استاندارد آزاد می‌شود. در ساختار هر مولکول از این اسید چرب، چند اتم هیدروژن وجود دارد؟
$(O = ۱۶ , C = ۱۲ , H = ۱ : g.mol^{-۱})$

۱) ۲۴ ۲) ۲۳ ۳) ۲۲ ۴) ۲۱

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ زمان‌بر ـ صفحهٔ ۴ ـ ۱۲۰۱)

اسیدهای آلی در ساختار خود گروه عاملی کربوکسیل دارند. ساختار گروه عاملی موجود در این مواد به‌صورت زیر است:



گروه R معادل با یک زنجیره هیدروکربنی و یا یک اتم هیدروژن است که به گروه کربوکسیل $(-COOH)$ متصل شده است. با افزایش طول زنجیره کربنی در کربوکسیلیک اسیدها، خاصیت ناقطبی این مواد افزایش یافته و ترکیب‌هایی تولید می‌شوند که کاملاً نامحلول در آب هستند. به چنین کربوکسیلیک اسیدهایی که زنجیره R بلند دارند، **اسید چرب** گفته می‌شود. فرمول عمومی کربوکسیلیک اسیدهای یک عاملی با زنجیر هیدروکربنی سیرشده به‌صورت $C_nH_{۲n}O_۲$ است. به ازای هر پیوند اشتراکی سه‌گانه، ۴ اتم هیدروژن از تعداد اتم‌های هیدروژن کسر می‌شود؛ بنابراین فرمول کربوکسیلیک اسید مورد نظر $C_nH_{۲n-۴}O_۲$ بوده و جرم مولی آن به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\text{جرم مولی } C_nH_{۲n-۴}O_۲ = ۱۲n + (۲n - ۴) \times ۱ + (۲ \times ۱۶) = ۱۴n + ۲۸$$

می‌دانیم که بر اثر سوختن کامل هر مول از یک ترکیب آلی با n اتم کربن، مقدار n مول گاز $CO_۲$ آزاد می‌شود. بر این اساس، معادله سوختن آن به‌صورت زیر می‌شود:

$$C_nH_{۲n-۴}O_۲ + (۱/۵n - ۲)O_۲ \longrightarrow nCO_۲ + (n-۲)H_۲O$$

با توجه به معادله بالا، از سوختن کامل یک مول از این اسید چرب، مقدار n مول گاز $CO_۲$ آزاد خواهد شد. از طرفی، بر اثر سوزاندن کامل ۲۱ گرم از اسید چرب مورد نظر، ۲۹/۱۲ لیتر گاز کربن‌دی‌اکسید در شرایط استاندارد تولید شده است. با توجه به داده‌های صورت سؤال، داریم:

$$?\,L\,CO_۲ = ۲۱\,g \text{ اسید چرب} \times \frac{۱\,mol \text{ اسید چرب}}{(۱۴n+۲۸)\,g \text{ اسید چرب}} \times \frac{(n)mol\,CO_۲}{۱\,mol \text{ اسید چرب}} \times \frac{۲۲/۴\,L\,CO_۲}{۱\,mol\,CO_۲} = ۲۹/۱۲\,L\,CO_۲$$

$$\Longrightarrow \frac{۲۱ \times (n)}{(۱۴n+۲۸)} = \frac{۲۹/۱۲}{۲۲/۴} \Rightarrow n = ۱۳$$

با توجه به مقدار مؤلفه n، فرمول شیمیایی اسید چرب مورد نظر به‌صورت $C_{۱۳}H_{۲۲}O_۲$ می‌باشد.

۷۰- در دمای مشخص، در محلولی از استیک اسید با غلظت ۰/۱ مول بر لیتر، به ازای هر یون استات، ۴ مولکول اسید یونیده نشده وجود دارد. غلظت مولی یون هیدروژن در این محلول برابر با چند مول بر لیتر بوده و ثابت یونش اسید در محلول مورد نظر چقدر است؟

۱) ۰/۰۲ ـ ۰/۰۰۵ ۲) ۰/۰۲ ـ ۰/۰۰۱ ۳) ۰/۱ ـ ۰/۰۰۵ ۴) ۰/۱ ـ ۰/۰۰۱

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۲۳ ـ ۱۲۰۱)

طبق فرض سؤال، در محلولی از استیک اسید، به ازای هر یون استات، ۴ مولکول اسید یونیده نشده وجود دارد. بر این اساس، می‌توان گفت از هر ۵ مولکول اولیه وارد شده به محلول، یک مولکول یونش یافته و ۴ مولکول به‌صورت دست‌نخورده باقی مانده است. در این رابطه، داریم:

$$۵\ molecule\ CH_۳COOH \longrightarrow \begin{cases} ۴ \text{ مولکول یونش نیافته} \\ \text{یک مولکول یونش یافته} \longrightarrow \begin{cases} ۱\ ion\ CH_۳COO^- \\ ۱\ ion\ H^+ \end{cases} \end{cases}$$

با توجه به تعداد مولکول یونش یافته از استیک اسید، درجه یونش این اسید را محاسبه می‌کنیم. در این رابطه، داریم:

$$\alpha = \frac{\text{تعداد ذرات یونش یافته}}{\text{تعداد کل ذرات}} = \frac{۱}{۵} = ۰/۲$$

طبق فرض سؤال، غلظت اسید در محلول داده شده برابر با ۰/۱ مول بر لیتر است. با توجه به درجه یونش اسید مورد نظر، غلظت یون هیدروژن را در این محلول محاسبه می‌کنیم:

$$[H^+] = M\alpha = ۰/۱ \times ۰/۲ = ۰/۰۲\ mol.L^{-۱}$$

غلظت اولیه اسید در محلول، برابر با ۰/۱ مول بر لیتر بوده است. مقدار ۰/۰۲ مول بر لیتر از اسید یونش یافته و غلظت این ماده در محلول، به ۰/۰۸ مول بر لیتر می‌رسد. از طرفی، با یونش یافتن ۰/۰۲ مول بر لیتر از اسید، غلظت یون استات و یون هیدرونیوم در محلول به ۰/۰۲ مول بر لیتر می‌رسد. بر این اساس، ثابت یونش اسید را محاسبه می‌کنیم:

$$Ka = \frac{[H^+][CH_۳COO^-]}{[CH_۳COOH]} = \frac{۰/۰۲ \times ۰/۰۲}{۰/۰۸} = ۰/۰۰۵\ mol.L^{-۱}$$

برای محاسبه ثابت یونش این اسید، به‌صورت زیر نیز می‌توان عمل کرد:

$$Ka = \frac{\alpha^۲ \times M}{(۱ - \alpha)} = \frac{(۰/۲)^۲ \times ۰/۱}{(۱ - ۰/۲)} = ۰/۰۰۵\ mol.L^{-۱}$$

درجه یونش

اسیدها و بازهای گوناگون، به هنگام انحلال در آب، به مقدار متفاوتی یونش پیدا می‌کنند. برای مقایسه کمّی میزان یونیده‌شدن انواع اسیدها و بازها، می‌توان از درجه یونش استفاده کرد. درجه یونش یک ماده، عبارت است از نسبت تعداد مولکول‌های یونیده‌شده از یک ماده به تعداد کل مولکول‌های حل‌شده از آن ماده. توجه داریم که اگر درجه یونش یک ماده را در عدد ۱۰۰ ضرب کنیم، درصد یونش آن ماده به‌دست می‌آید. بر این اساس، داریم:

$$\text{درصد یونش} = \frac{\text{مقدار اسید یونیده شده}}{\text{مقدار اولیه اسید}} \times ۱۰۰ \Rightarrow \text{درجه یونش} = \frac{\text{مقدار اسید یونیده شده}}{\text{مقدار اولیه اسید}}$$

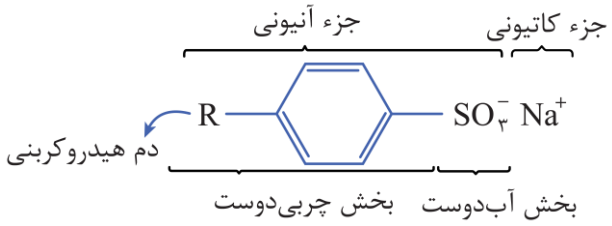
با توجه به روابط بالا، می‌توان گفت اگر در محلولی از اسید HA، درصد یونش برابر با ۲۰٪ باشد، به ازای هر ۱۰۰ مولکول اسید حل شده در محلول، ۲۰ یون A^- ایجاد شده و ۸۰ ذره HA نیز به‌صورت یونیده نشده باقی می‌ماند. در چنین محلولی، غلظت مولی ذرات HA (ذرات اسید یونیده نشده)، چهار برابر غلظت مولی یون A^- است.

۷۱- نوعی پاک‌کننده غیرصابونی که زنجیر هیدروکربنی سیرشده دارد، در ساختار خود دارای ۱۸ اتم کربن است. شمار اتم‌های هیدروژن موجود در هر واحد فرمولی از این ماده، چند برابر شمار اتم‌های هیدروژن در نونان است؟

۱) ۱/۷۵ ۲) ۱/۶۵ ۳) ۱/۵۵ ۴) ۱/۴۵

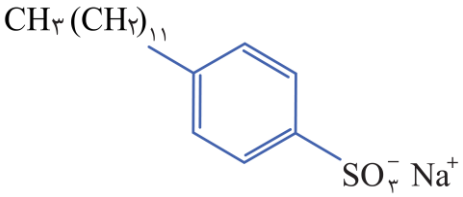
پاسخ: گزینهٔ ۴ (آسان ـ مفهومی ـ سریع ـ صفحهٔ ۱۱ ـ ۱۲۰۱)

ساختار کلی پاک‌کننده‌های غیرصابونی به‌صورت زیر است:



SanjeshCloud

فرمول عمومی پاک‌کننده‌های غیرصابونی به‌صورت $RC_6H_4SO_3^-Na^+$ بوده و بخش R در این مواد، معادل با یک زنجیره هیدروکربنی است. طبق فرض سؤال، پاک‌کننده مورد نظر یک زنجیر هیدروکربنی سیرشده دارد و در ساختار آن، کلاً ۱۸ اتم کربن وجود دارد. از ۱۸ اتم کربن موجود در این پاک‌کننده، ۶ اتم کربن در ساختار حلقه بنزنی قرار گرفته و ۱۲ اتم کربن در ساختار دم هیدروکربنی وجود دارد. ساختار این ماده به‌صورت زیر است:



با توجه به ساختار رسم شده، فرمول شیمیایی این پاک‌کننده به‌صورت $C_{12}H_{25}-C_6H_4-SO_3^-Na^+$ شده و در هر واحد فرمولی از آن، ۲۹ اتم هیدروژن وجود دارد. از طرفی، فرمول شیمیایی نونان به‌صورت C_9H_{20} است، پس نسبت شمار اتم‌های هیدروژن در این دو ماده برابر با $\frac{29}{20} = 1/45$ می‌باشد.

۷۲- کدام‌یک از مطالب زیر، درست است؟

۱) فلزها و گرافیت (مغز مداد)، به ترتیب از جمله رساناهای یونی و الکترونی هستند.
۲) هیدروژن یدید، یک ترکیب قطبی بوده و برخلاف آهک، یک اسید آرنیوس به شمار می‌رود.
۳) صابون‌ها خاصیت اسیدی داشته و در برخورد با کاغذ pH، رنگ این کاغذ را از زرد به آبی تغییر می‌دهند.
۴) در محلول یک اسید با ثابت یونش بسیار بزرگ، غلظت یون هیدرونیوم به‌یقین با غلظت اولیهٔ اسید برابر است.

پاسخ: گزینهٔ ۲ (آسان ـ مفهومی و حفظی ـ سریع ـ صفحهٔ ۲۳ ـ ۱۲۰۱)

هیدروژن یدید (HI)، بر اثر حل شدن در آب یون هیدرونیوم تولید می‌کند، بنابراین اسید آرنیوس است. این ماده از مولکول‌های دواتمی با اتم‌های متفاوت از هم ساخته شده؛ پس قطبی است. معادلهٔ یونش این ماده در محلول به‌صورت زیر است:

$$HI(aq) \rightarrow H^+(aq) + I^-(aq)$$

در نقطه مقابل، آهک یا همان کلسیم اکسید، نوعی **اکسید فلزی** به شمار می‌رود و بر اثر حل شدن در آب، مقداری یون هیدروکسید در محلول تولید می‌کند؛ بنابراین **باز آرنیوس** است.

آهک

برخی کشاورزان، کلسیم اکسید (آهک) را به‌عنوان اکسید فلزی برای افزایش بهره‌وری در کشاورزی به خاک می‌افزایند؛ زیرا افزودن این نوع مواد به خاک سبب می‌شود تا مقدار و نوع مواد معدنی در دسترس گیاه تغییر کند. همچنین از کلسیم اکسید برای کاهش میزان اسیدی بودن خاک و کنترل میزان اسیدی بودن آب دریاچه‌ها استفاده می‌شود.

اکسیدهای اسیدی و بازی

اسیدها و بازها، از جمله موادی هستند که در زندگی روزمره با آن‌ها سروکار داریم. هر گروه از این مواد، ویژگی‌های مشخصی دارند. در این رابطه، داریم:

بازها →
- در محلول آن‌ها غلظت یون OH^- بیشتر است
- اغلب مزه تلخ دارند
- مثال‌ها : لوله بازکن – شیشه پاک‌کن



اسیدها →
- در محلول آن‌ها غلظت یون H^+ بیشتر است
- اغلب مزه ترش دارند
- در واکنش با فلزها گاز هیدروژن آزاد می‌کنند
- مثال‌ها : آبلیمو – استیک اسید – سرکه



اکسیدهای حاصل از برخی عناصر، با مولکول‌های آب وارد واکنش شده و pH آب را تغییر می‌دهند. این مواد، از جمله اسیدها و بازهای آرنیوس هستند. به‌طور کلی، اکسیدهای فلزی را اکسیدهای بازی می‌نامند. این مواد طی واکنش با آب، سبب افزایش غلظت یون هیدروکسید شده و pH محلول را افزایش می‌دهند. باریم اکسید، لیتیم اکسید، سدیم اکسید و کلسیم اکسید (آهک)، در دسته اکسیدهای بازی قرار دارند و براساس معادله‌های زیر با آب واکنش می‌دهند:

$I)\ Li_2O(s) + H_2O(l) \rightarrow 2LiOH(aq) \rightarrow 2Li^+(aq) + 2OH^-(aq)$

$II)\ Na_2O(s) + H_2O(l) \rightarrow 2NaOH(aq) \rightarrow 2Na^+(aq) + 2OH^-(aq)$

$III)\ CaO(s) + H_2O(l) \rightarrow Ca(OH)_2(aq) \rightarrow Ca^{2+}(aq) + 2OH^-(aq)$

$IV)\ BaO(s) + H_2O(l) \rightarrow Ba(OH)_2(aq) \rightarrow Ba^{2+}(aq) + 2OH^-(aq)$

توجه داریم که آلومینیم اکسید و اکسیدهای حاصل از فلزهای واسطه مثل اکسیدهای آهن، اکسیدهای مس و ...، اصلاً با آب واکنش نداده و خاصیت بازی ندارند. در نقطه مقابل، اکسیدهای نافلزی را اکسیدهای اسیدی می‌نامند. این مواد طی واکنش با آب، سبب افزایش غلظت یون هیدروژن شده و pH محلول را کاهش می‌دهند. دی‌نیتروژن پنتاکسید، کربن دی‌اکسید، گوگرد دی‌اکسید و گوگرد تری‌اکسید، در دسته اکسیدهای اسیدی قرار دارند و براساس معادله‌های زیر با آب واکنش می‌دهند:

$I)\ N_2O_5(s) + H_2O(l) \rightarrow 2HNO_3(aq) \rightarrow 2H^+(aq) + 2NO_3^-(aq)$

$II)\ CO_2(g) + H_2O(l) \rightarrow H_2CO_3(aq) \rightarrow H^+(aq) + HCO_3^-(aq)$

$III)\ SO_3(g) + H_2O(l) \rightarrow H_2SO_4(aq) \rightarrow 2H^+(aq) + SO_4^{2-}(aq)$

بررسی سایر گزینه‌ها:

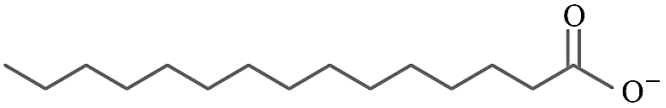
۱) فلزها و گرافیت (مغز مداد) **رسانای جریان برق** هستند. از آنجا که رسانایی آن‌ها به وسیله الکترون‌ها انجام می‌شود، به آن‌ها رسانای الکترونی می‌گویند. نوع دیگری از رسانایی نیز وجود دارد که به وسیله یون‌ها انجام می‌شود و به آن **رسانای یونی** می‌گویند. این رسانایی هنگامی ایجاد می‌شود که یون‌های موجود در یک ماده بتوانند آزادانه از نقطه‌ای به نقطه دیگر جابه‌جا شوند، زیرا در این شرایط بارهای الکتریکی نیز جابه‌جا خواهند شد؛ مانند محلول **سدیم کلرید** و یا **سدیم کلرید مذاب**.

۳) پاک‌کننده‌های صابونی، نمک آمونیوم، پتاسیم و یا سدیم اسیدهای چرب هستند. این مواد خاصیت بازی ($pH > 7$) داشته و در برخورد با کاغذ pH، رنگ این کاغذ را از زرد به آبی تغییر می‌دهند.

۴) اگر ثابت یونش یک اسید تک‌پروتون‌دار بسیار بزرگ باشد، این اسید در محلول آبی خود به‌طور کامل یونیده شده و در نتیجه غلظت یون هیدرونیوم موجود در محلول نهایی با غلظت اولیهٔ اسید برابر خواهد بود. در رابطه با چنین محلولی، می‌توان رابطه $[H^+] = M$ را نوشت. توجه داریم که در این حالت، درجه یونش اسید برابر با یک بوده و در این محلول رابطه $\alpha = \frac{[H^+]}{M} = 1$ برقرار خواهد بود. توجه داریم که اگر اسید مورد نظر بیشتر از یک پروتون داشته باشد، دیگر چنین رابطه‌ای در محلول آن صدق نمی‌کند.

ماز

۷۳- ساختار بخش آنیونی در یک پاک‌کننده صابونی مایع با کاتیون تک‌اتمی، به‌صورت زیر است:



یک نمونه ۵۶ گرمی از این پاک‌کننده، با چند لیتر محلول ۰/۰۵ مولار کلسیم نیترات به‌طور کامل واکنش می‌دهد؟

$(K = 39, O = 16, C = 12, H = 1 : g.mol^{-1})$

۱) ۴۰ ۲) ۲۰ ۳) ۴ ۴) ۲

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۹ ـ ۱۲۰۱)

پاک‌کننده صابونی مایع با کاتیون تک‌اتمی، در ساختار خود حاوی کاتیون پتاسیم است. در ساختار پاک‌کننده مورد نظر، یک زنجیره هیدروکربنی ۱۴ کربنه به گروه $-COO^-$ متصل شده است. بر این اساس، می‌توان گفت فرمول شیمیایی این نوع پاک‌کننده صابونی به‌صورت $C_{14}H_{29}COOK$ خواهد بود. جرم مولی این نوع صابون برابر با ۲۸۰ گرم بر مول است. مولکول‌های صابون در واکنش با کاتیون‌های موجود در آب‌های سخت، به رسوب تبدیل می‌شوند و نمی‌توانند به‌عنوان یک پاک‌کننده ایفای نقش کنند. با توجه به توضیحات داده شده، معادله واکنش پاک‌کننده مورد نظر با یون کلسیم موجود در محلول کلسیم نیترات به‌صورت زیر خواهد بود:

$$2C_{14}H_{29}COOK(aq) + Ca^{2+}(aq) \rightarrow (C_{14}H_{29}COO)_2Ca(s) + 2K^+(aq)$$

با توجه به معادله نوشته‌شده، حجم محلول کلسیم نیترات را محاسبه می‌کنیم:

$$?\,L \text{ محلول} = 56\,g\,C_{14}H_{29}COOK \times \frac{1\,mol\,C_{14}H_{29}COOK}{280\,g\,C_{14}H_{29}COOK} \times \frac{1\,mol\,Ca^{2+}}{2\,mol\,C_{14}H_{29}COOK} \times \frac{1\,mol\,Ca(NO_3)_2}{1\,mol\,Ca^{2+}}$$

$$\times \frac{1\,L \text{ محلول}}{0/05\,mol\,Ca(NO_3)_2} = 2\,L$$

با توجه به محاسبات بالا، طی این فرایند ۲ لیتر محلول کلسیم نیترات مصرف شده است.

آب سخت

نوع و میزان یون‌های موجود در آب، بر قدرت پاک‌کنندگی صابون‌ها تأثیر به‌سزایی دارد. درصورتی‌که آب مورد استفاده برای شست‌وشوی لباس‌ها، حاوی کاتیون‌های کلسیم و منیزیم باشد (به چنین آب‌هایی، به‌اصطلاح آب سخت گفته می‌شود)، قدرت پاک‌کنندگی صابون کاهش پیدا می‌کند؛ چرا که مولکول‌های صابون، براساس معادله‌های زیر با کاتیون‌های موجود در آب‌های سخت واکنش می‌دهند:

واکنش صابون با یون کلسیم:	$2RCOONa(aq) + Ca^{2+}(aq) \rightarrow (RCOO)_2Ca(s) + 2Na^+(aq)$
واکنش صابون با یون منیزیم:	$2RCOONa(aq) + Mg^{2+}(aq) \rightarrow (RCOO)_2Mg(s) + 2Na^+(aq)$

اضافه کردن یون فسفات به صابون‌ها، به منظور افزایش قدرت پاک‌کنندگی آن‌ها در آب سخت است. در این حالت با انحلال نمک‌های فسفات‌دار در آب، یون فسفات با یون کلسیم و منیزیم موجود در آب سخت رسوب تشکیل می‌دهد و از تشکیل رسوب صابون با این کاتیون‌ها جلوگیری می‌کند. یون فسفات موجود در این دسته از شوینده‌ها، با یون‌های Mg^{2+} و Ca^{2+} براساس معادله‌های زیر واکنش می‌دهد:

$$2PO_4^{3-}(aq) + 3Ca^{2+}(aq) \rightarrow Ca_3(PO_4)_2(s) \quad , \quad 2PO_4^{3-}(aq) + 3Mg^{2+}(aq) \rightarrow Mg_3(PO_4)_2(s)$$

۷۴- کدام‌یک از مطالب زیر، نادرست است؟

۱) واکنش $HF(aq) + Cl^-(aq) \rightleftharpoons HCl(aq) + F^-(aq)$ با غلظت برابر از هر ماده، به سمت راست پیش می‌رود.

۲) بر اساس یافته‌های آرنیوس، محلول بازهای مختلف رسانای الکتریسیته بوده و رسانایی آن‌ها با یکدیگر برابر نیست.

۳) در محلول آبی از هیدروفلوئوریک اسید، غلظت مولی یون فلوئورید با غلظت مولی یون هیدرونیوم برابر است.

۴) اسیدها با اغلب عناصر فلزی واکنش داده و در تماس با پوست بدن، سوزش ایجاد می‌کنند.

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۱۹ ـ ۱۲۰۱)

به ترکیب حاصل از یک هالوژن با هیدروژن، به‌اصطلاح **هیدروژن هالید** گفته می‌شود. این مواد، عبارت هستند از:

هیدروژن هالیدها $\rightarrow \begin{cases} HF \\ HCl \\ HBr \\ HI \end{cases}$

قدرت اسیدی HF از سایر هیدروژن هالیدها **کمتر** است. در واقع تنها اسید ضعیف میان هیدروژن هالیدها، **هیدروفلوئوریک اسید** می‌باشد.

این اسید، در مقایسه با سایر مواد با میل کمتری یون هیدروژن از دست می‌دهد. اگر در یک محلول دو اسید وجود داشته باشد، واکنش میان آن‌ها به سمتی می‌رود که اسید **ضعیف‌تر** تولید و اسید **قوی‌تر** مصرف شود. در واقع در این فرایند، اسید قوی‌تر یون هیدروژن از دست داده و اسید ضعیف‌تر تولید می‌شود. پس در تعادل زیر که میان هیدروکلریک اسید و هیدروفلوئوریک اسید باید ایجاد شود، واکنش به سمت چپ (مصرف اسید قوی و تولید اسید ضعیف) پیش می‌رود:

$$HF(aq) + Cl^-(aq) \rightleftharpoons HCl(aq) + F^-(aq)$$

اسیدهای قوی و ضعیف

به نکات زیر درباره اسیدهای قوی و ضعیف توجه کنید:

- هیدرویدیک اسید ($HI(aq)$)، هیدروبرمیک اسید ($HBr(aq)$)، هیدروکلریک اسید ($HCl(aq)$) و سولفوریک اسید(H_2SO_4) اسیدهای قوی با ثابت یونش بسیار بزرگ هستند. بنابراین معادلهٔ یونش آن‌ها در آب یک‌طرفه است. این مواد بر اساس معادلات زیر در آب یونش پیدا می‌کنند:

$HI(aq) \longrightarrow H^+(aq) + I^-(aq)$ $\quad$ $HBr(aq) \longrightarrow H^+(aq) + Br^-(aq)$

$HCl(aq) \longrightarrow H^+(aq) + Cl^-(aq)$ $\quad$ $H_2SO_4(aq) \longrightarrow H^+(aq) + HSO_4^-(aq)$

- نیتریک اسید برخلاف نیترواسید، یک اسید قوی با ثابت یونش بزرگ است و معادلهٔ یونش آن در آب یک‌طرفه است:

$HNO_3(aq) \longrightarrow H^+(aq) + NO_3^-(aq)$

- هیدروفلوئوریک اسید ($HF(aq)$)، نیترواسید ($HNO_2(aq)$)، فورمیک اسید ($HCOOH(aq)$)، استیک اسید ($CH_3COOH(aq)$)، کربنیک اسید($H_2CO_3(aq)$) و هیدروسیانیک اسید ($HCN(aq)$)، اسیدهای ضعیف با ثابت یونش کوچک هستند و فرایند یونش آن‌ها در آب یک واکنش تعادلی است. این مواد بر اساس معادلات زیر در آب یونش پیدا می‌کنند:

$HF(aq) \leftrightharpoons H^+(aq) + F^-(aq)$ $\quad$ $HNO_2(aq) \leftrightharpoons H^+(aq) + NO_2^-(aq)$

$HCOOH(aq) \leftrightharpoons H^+(aq) + HCOO^-(aq)$ $\quad$ $CH_3COOH(aq) \leftrightharpoons H^+(aq) + CH_3COO^-(aq)$

مقایسهٔ مقابل را به خاطر بسپارید:

قدرت اسیدی (K_a) : $HF > HNO_2 > HCOOH > CH_3COOH > H_2CO_3 > HCN$

- در شرایط یکسان، هر چه قدرت اسیدی (ثابت یونش) یک اسید بزرگ‌تر باشد، غلظت مولی یون هیدرونیوم در محلول حاصل از آن اسید بیشتر و در نتیجه غلظت مولی یون هیدروکسید در آن محلول کمتر است. به علاوه در محلول اسید با ثابت یونش بزرگ‌تر، رسانایی الکتریکی محلول نیز بیشتر خواهد بود.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۲ بر اساس یافته‌های آرنیوس، محلول بازها و اسیدهای مختلف رسانای جریان الکتریسیته هستند، اما میزان رسانایی آن‌ها با یکدیگر یکسان نیست؛ چراکه این مواد به میزان برابری در آب یونش پیدا نکرده و درجه یونش برای هریک از آن‌ها متفاوت است.

نظریه آرنیوس

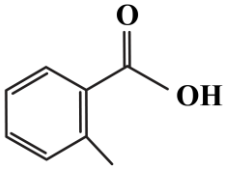
شواهد علمی نشان می‌دهند که پیش از شناخته‌شدن ساختار اسیدها و بازها، شیمی‌دان‌ها با ویژگی‌های هر کدام از این مواد و برخی از واکنش‌های میان آن‌ها آشنا بودند؛ اما توجیه رفتار اسیدها و بازها در شرایط مختلف، به یک مبنای علمی نیاز داشت. آرنیوس در زمان خود طی پژوهش‌هایی که بر روی رسانایی الکتریکی محلول‌های آبی انجام می‌داد، برای نخستین بار اسیدها و بازها را بر یک مبنای علمی توصیف کرد. براساس یافته‌های تجربی آرنیوس، هنگامی‌که اسیدها و بازها در آب حل می‌شوند، مقدار یون‌های موجود در آب را افزایش می‌دهند و به همین خاطر، محلول اسیدها و بازها رسانای جریان الکتریکی هستند. براساس نظریه آرنیوس، اسید ماده‌ای است که در آب حل می‌شود و طی انحلال خود، غلظت یون هیدروژن را در محلول افزایش می‌دهد. به‌عنوان مثال، گاز هیدروژن کلرید یک اسید آرنیوس است؛ چرا که به هنگام انحلال در آب، سبب تولید یون هیدروژن شده و غلظت این یون را در محلول افزایش می‌دهد. در نظریه آرنیوس، باز ماده‌ای است که در آب حل می‌شود و طی انحلال خود، غلظت یون هیدروکسید را در محلول افزایش می‌دهد. به‌عنوان مثال، سدیم هیدروکسید جامد، یک باز آرنیوس به شمار می‌رود؛ چرا که به هنگام انحلال در آب، سبب آزادشدن یون هیدروکسید در محلول و افزایش غلظت آن می‌شود.

۳ در محلول آبی از هیدروفلوئوریک اسید، به ازای یونش هر ذره اسیدی، یک یون فلوئورید و یک یون هیدروژن تولید می‌شود. بر این اساس، می‌توان گفت در محلول مورد نظر غلظت مولی یون فلوئورید با غلظت مولی یون هیدرونیوم برابر است.

۴) اسیدها در تماس با پوست بدن، احساس سوزش ایجاد می‌کنند. این مواد با اغلب فلزها واکنش داده و طی این فرایند، گاز هیدروژن تولید می‌شود. طلا، نقره، پلاتین و مس، از جمله فلزهایی هستند که با محلول‌های اسیدی واکنش نمی‌دهند.

ماز

۷۵- در رابطه با محلول ۰/۱ مولار از اسید آلی مقابل، کدام مطلب زیر درست است؟ ($O = ۱۶ , C = ۱۲ , H = ۱ : g.mol^{-1}$)



۱) در یک نمونه ۵ لیتری از این محلول، ۷۰ گرم اسید حل شده است.
۲) در صورت تغییر دمای این محلول، غلظت یون‌های موجود در محلول ثابت باقی می‌ماند.
۳) محلول این ماده، شدیدتر از محلول ۰/۱ مولار هیدروکلریک اسید، با فلز منیزیم واکنش می‌دهد.
۴) در محلول این ماده، سرعت متوسط مصرف ذرات اسید با سرعت متوسط تولید این ذرات برابر است.

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ مفهومی و محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۲۴ ـ ۱۲۰۱)

ترکیب مورد نظر، در ساختار خود دارای گروه عاملی کربوکسیل بوده و می‌دانیم که همه کربوکسیلیک اسیدها، از جمله اسیدهای ضعیف به شمار می‌روند. یک اسید ضعیف، به‌صورت تعادلی در محلول خود یونش یافته و بر این اساس، در محلول آن سرعت متوسط مصرف ذرات اسید با سرعت متوسط تولید این ذرات برابر است. به همین خاطر است که غلظت ذرات اسید یونیده نشده در محلول ثابت باقی می‌ماند.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) فرمول شیمیایی اسید داده شده، به‌صورت $C_۸H_۸O_۲$ بوده و جرم مولی این ماده نیز برابر با ۱۳۶ گرم بر مول است. اگر غلظت این ماده در محلول خود برابر با ۰/۱ مول بر لیتر باشد، به سادگی می‌توان جرم اسید حل شده در محلول را محاسبه کرد. در این رابطه، داریم:

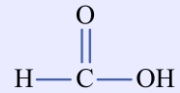
$$?\, g\ C_۸H_۸O_۲ = ۵\ L \text{ محلول} \times \frac{۰/۱\ mol\ C_۸H_۸O_۲}{۱\ L \text{ محلول}} \times \frac{۱۳۶\ g\ C_۸H_۸O_۲}{۱\ mol\ C_۸H_۸O_۲} = ۶۸\ g$$

۲) در صورت تغییر دمای یک محلول که حاوی نوعی اسید ضعیف است، مقدار ثابت یونش اسید در محلول مورد نظر دچار تغییر می‌شود. با تغییر ثابت یونش اسید، درجه یونش این ماده نیز تغییر کرده و بر این اساس، غلظت یون‌های موجود در محلول تغییر می‌کند. برای مثال، اگر با تغییر دما، ثابت یونش یک اسید افزایش پیدا کند، مجموع غلظت یون‌ها نیز در محلول مورد نظر زیاد می‌شود.

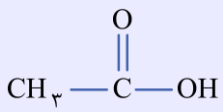
۳) چون اسید مورد نظر نوعی اسید ضعیف است، محلول آبی ۰/۱ مولار از این ماده، با شدت کمتری نسبت به محلول ۰/۱ مولار هیدروکلریک اسید، با فلز منیزیم واکنش می‌دهد.

کربوکسیلیک اسیدها

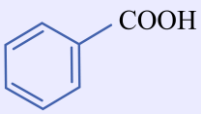
کربوکسیلیک اسیدها خاصیت اسیدی داشته و pH محلول آن‌ها کوچک‌تر از ۷ است. با انحلال این مواد در آب، غلظت یون هیدروژن در محلول افزایش پیدا می‌کند. توجه داریم که کربوکسیلیک اسیدها مزه ترش دارند به‌طوری‌که مزه ترش میوه‌هایی مانند ریواس، انگور، لیمو ترش، کیوی و گوجه سبز را به وجود این مواد نسبت می‌دهند. متانوئیک اسید (فورمیک اسید) با فرمول $HCOOH$، اولین عضو خانواده کربوکسیلیک اسیدها است که بر اثر گزش مورچه سرخ وارد بدن شده و باعث سوزش و خارش در محل گزیدگی می‌شود. ساختار این ماده به‌صورت زیر است:



اتانوئیک اسید (استیک اسید) با فرمول $CH_۳COOH$، دومین عضو خانواده کربوکسیلیک اسیدها است. این ماده آشناترین عضو خانواده کربوکسیلیک اسیدها بوده و یکی از پرکاربردترین اسیدها در زندگی روزمره است. به‌عنوان مثال، اسید موجود در سرکه همان استیک اسید است. ساختار این ماده به‌صورت زیر است:

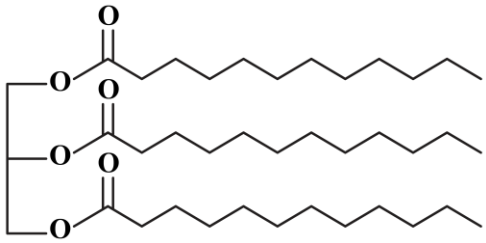


بنزوئیک اسید با فرمول $C_۷H_۶O_۲$، نوعی کربوکسیلیک اسید آروماتیک است. این ترکیب در توت‌فرنگی و تمشک وجود داشته و به‌عنوان یک ماده نگهدارنده در صنایع غذایی کاربرد دارد. ساختار این ماده آلی به‌صورت زیر است:



SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۷۶- یک نمونه ۱۲۴ گرمی از سدیم اکسید را در ۲۰ لیتر آب حل می‌کنیم. مقدار ۱/۵ لیتر از محلول حاصل، با چند گرم از ترکیب زیر به‌طور کامل در واکنش تولید نوعی صابون شرکت می‌کند؟ ($Na = ۲۳ , O = ۱۶ , C = ۱۲ , H = ۱ : g.mol^{-۱}$)



۱) ۱۹/۹ ۲) ۵۹/۶ ۳) ۲۱/۳ ۴) ۶۳/۸

پاسخ: گزینهٔ ۴ (سخت ـ محاسباتی ـ زمان‌بر ـ صفحهٔ ۶ ـ ۱۲۰۱)

برای حل این سؤال، مراحل زیر را طی می‌کنیم:

۱) محاسبه غلظت باز (سدیم هیدروکسید) ایجاد شده طی انحلال سدیم اکسید

۲) نوشتن معادله واکنش استر سنگین با سدیم هیدروکسید

۳) محاسبه جرم استر سنگین مصرف شده در واکنش

سدیم اکسید، یک نوع اکسید فلزی است که بر اساس معادله زیر با آب واکنش داده و سدیم هیدروکسید را تولید می‌کند:

$$Na_۲O(s) + H_۲O(l) \rightarrow ۲NaOH(aq)$$

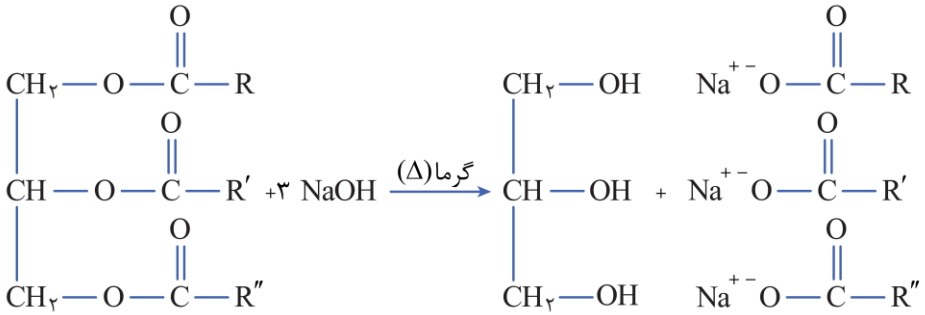
در قدم اول، مقدار مول سدیم هیدروکسید تولید شده در محلول را محاسبه می‌کنیم. داریم:

$$?\,mol\,NaOH = ۱۲۴\,g\,Na_۲O \times \frac{۱\,mol\,Na_۲O}{۶۲\,g\,Na_۲O} \times \frac{۲\,mol\,NaOH}{۱\,mol\,Na_۲O} = ۴\,mol$$

در قدم بعد، غلظت سدیم هیدروکسید را در محلول محاسبه می‌کنیم:

$$[NaOH] = \frac{\text{مول } NaOH}{\text{لیتر محلول}} = \frac{۴\,mol\,NaOH}{\text{محلول } ۲۰\,L} = ۰/۲\,mol.L^{-۱}$$

واکنش کلی میان محلول سود با چربی‌ها به‌صورت زیر است:



فرمول شیمیایی استر مورد نظر به‌صورت $C_{۳۹}H_{۷۴}O_۶$ است. با توجه به ساختار داده شده، معادله واکنش به‌صورت زیر می‌شود:

$$C_{۳۹}H_{۷۴}O_۶ + ۳NaOH \rightarrow ۳C_{۱۲}H_{۲۳}O_۲Na + C_۳H_۸O_۳$$

همان‌طور که مشخص است، طی این فرایند صابون تولید می‌شود. با توجه به معادله واکنش، جرم چربی مصرف شده را محاسبه می‌کنیم.

$$?\,g\,C_{۳۹}H_{۷۴}O_۶ = ۱/۵\,L\ \text{محلول سود} \times \frac{۰/۲\,mol\,NaOH}{\text{محلول سود } ۱\,L} \times \frac{۱\,mol\,C_{۳۹}H_{۷۴}O_۶}{۳\,mol\,NaOH} \times \frac{۶۳۸\,g\,C_{۳۹}H_{۷۴}O_۶}{۱\,mol\,C_{۳۹}H_{۷۴}O_۶} = ۶۳/۸\,g$$

۷۷- در شرایط یکسان از نظر غلظت و دما، در کدام گزینه محلول آبی حاصل از دو ماده داده شده، بیشترین تفاوت در مقدار رسانایی الکتریکی را دارد؟

۱) شکر ـ فورمیک اسید
۲) هیدروبرمیک اسید ـ اتانول
۳) هیدروفلوئوریک اسید ـ اتانول
۴) هیدروسیانیک اسید ـ نیتریک اسید

پاسخ: گزینهٔ ۲ (آسان ـ مفهومی ـ سریع ـ صفحهٔ ۲۳ ـ ۱۲۰۱)

رسانایی الکتریکی محلول‌های آبی با مجموع غلظت آنیون‌ها و کاتیون‌های موجود در آن‌ها متناسب است. در محلول اسیدهای قوی، غلظت یون‌ها بسیار زیاد بوده و این محلول‌ها، **بیشترین** رسانایی الکتریکی را دارند. اسیدهای ضعیف، به‌صورت جزئی یونش یافته و بر این اساس، رسانایی الکتریکی محلول آن‌ها **کمتر** است. مواد غیرالکترولیت نیز به‌صورت کاملاً مولکولی در محلول حل شده و محلول آن‌ها اصلاً رسانایی الکتریکی ندارد. هیدروبرمیک اسید، یک اسید قوی بوده و محلول آن رسانایی بالایی دارد درحالی‌که اتانول، یک ماده **غیرالکترولیت** بوده و محلول آن **نارسانا** است، پس این دو محلول **بیشترین تفاوت** را در مقدار رسانایی الکتریکی دارند.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) شکر، یک ماده غیرالکترولیت بوده و محلول آن رسانایی الکتریکی ندارد درحالی‌که فورمیک اسید، یک اسید ضعیف به شمار رفته و محلول آبی آن رسانایی الکتریکی بسیار کمی دارد.

۳) اتانول، یک ماده غیرالکترولیت بوده و محلول آن رسانایی الکتریکی ندارد درحالی‌که هیدروفلوئوریک اسید، یک اسید ضعیف به شمار رفته و محلول آبی آن رسانایی الکتریکی بسیار کمی دارد.

۴) هیدروسیانیک اسید، یک اسید ضعیف به شمار رفته و محلول آبی آن رسانایی الکتریکی بسیار کمی دارد. این در حالی است که نیتریک اسید، یک اسید قوی بوده و محلول آن رسانایی الکتریکی بالایی دارد.

انواع مواد

مواد، به دو صورت یونی و مولکولی در آب حل می‌شوند. در رابطه با هر یک از این مواد، داریم:

◄ انحلال مولکولی: این مواد، به‌صورت مولکولی در آب حل شده و با انحلال در آب، هیچ یونی تولید نمی‌کنند. در این فرایند، ساختار ذرات حل‌شونده دچار تغییر نمی‌شود. برای مثال، اتانول، متانول، استون و شکر به‌صورت مولکولی در آب حل شده و محلول آن‌ها نسبتاً فاقد یون است. بدیهی است که چنین محلول‌هایی نارسانا هستند. این مواد غیرالکترولیت بوده و محلول حاوی آن‌ها نیز یک محلول غیرالکترولیت به شمار می‌رود.

یون تولید نمی‌کند ← انحلال مولکولی ← ماده غیرالکترولیت

◄ انحلال یونی: این مواد، به‌صورت یونی در آب حل شده و با انحلال آن‌ها، تعدادی یون در محلول تولید می‌شود. طی این فرایند، ساختار ذرات حل‌شونده دچار تغییر می‌شود. برای مثال، HCl به‌صورت یونی در آب حل شده و محلول آن حاوی یون است. چنین محلول‌هایی رسانا بوده و جریان الکتریسیته را عبور می‌دهند. با توجه به توضیحات داده شده، این مواد الکترولیت بوده و محلول حاوی آن‌ها نیز یک محلول الکترولیت به شمار می‌رود.

یون تولید می‌کند ← انحلال یونی ← ماده الکترولیت

۷۸- یک نمونه محلول ۰/۲ مول بر لیتر از اسید HA در اختیار داریم. اگر غلظت یون هیدرونیوم در محلول این اسید برابر با 10^{-5} مول بر لیتر باشد، ثابت یونش اسیدی آن در دمای آزمایش به‌تقریب کدام است و چند درصد از ذرات اسید، در این محلول آبی یونیده شده است؟

۱) 5×10^{-3} ـ 5×10^{-10}
۲) 2×10^{-3} ـ 5×10^{-10}
۳) 2×10^{-3} ـ 10^{-8}
۴) 5×10^{-3} ـ 10^{-8}

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۲۳ ـ ۱۲۰۱)

برای حل این سؤال، مراحل زیر را طی می‌کنیم:

۱) محاسبه ثابت یونش اسید در محلول

۲) محاسبه درصد یونش اسید در محلول

اسید مورد نظر، بر اساس معادلهٔ زیر در محلول خود یونش پیدا می‌کند:

$$HA(aq) \rightleftharpoons H^+(aq) + A^-(aq)$$

در قدم اول، ثابت یونش اسید داده شده را محاسبه می‌کنیم:

$$K_a = \frac{[H^+][A^-]}{[HA]_{\text{تعادلی}}} = \frac{[H^+]^2}{[HA]_{\text{اولیه}} - [H^+]} \xrightarrow{\text{جایگذاری}} \frac{(۱۰^{-۵})^2}{۰/۲ - \underbrace{۱۰^{-۵}}_{\text{قابل چشم پوشی}}} \Rightarrow K_a = ۵ \times ۱۰^{-۱۰}\ mol.L^{-۱}$$

در ادامه، برای محاسبه درصد اسید یونیده شده (درصد یونش اسید در محلول)، مولاریته یون هیدرونیوم را بر مولاریته اولیه اسید تقسیم کرده و حاصل را در ۱۰۰ ضرب می‌کنیم. بر این اساس، داریم:

$$\text{درصد یونش} = \frac{\text{مقدار اسید یونیده شده}}{\text{مقدار اولیه اسید}} \times ۱۰۰ = \frac{۱۰^{-۵}}{۰/۲} \times ۱۰۰ = ۵ \times ۱۰^{-۳} \text{ درصد}$$

۷۹- در رابطه با استیک اسید، کدام موارد از عبارت‌های زیر درست هستند؟

الف ـ در محلول آبی این اسید، تعداد یون هیدروژن تولید شده، به‌یقین بیشتر از ذرات اسید یونیده نشده است.

ب ـ در ساختار هر ذره از آنیون تولید شده طی یونش آن، ۶ پیوند اشتراکی بین اتم‌ها برقرار شده است.

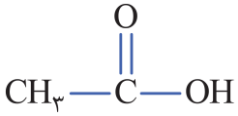
ج ـ ثابت یونش این ماده در مقایسه با ثابت یونش هیدروسیانیک اسید بیشتر است.

د ـ محلول آبی حاوی این اسید آلی، مزه ترش دارد.

۱) «الف» و «د»　　۲) «الف» و «ب»　　۳) «ج» و «د»　　۴) «ب» و «ج»

پاسخ: گزینهٔ ۳　　**(متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۲۳ ـ ۱۲۰۱)**

اتانوئیک اسید (استیک اسید) با فرمول $CH_۳COOH$، دومین عضو خانواده کربوکسیلیک اسیدها است. ساختار این ماده به‌صورت زیر است:

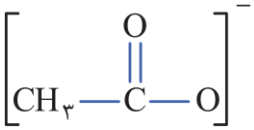


در رابطه با اتانوئیک اسید، عبارت‌های (ج) و (د) درست هستند.

بررسی موارد:

الف) اتانوئیک اسید، یک اسید ضعیف بوده و بر این اساس، به مقدار بسیار کمی در محلول خود یونش پیدا می‌کند. در این حالت، مقدار بسیار کمی یون در محلول تولید می‌شود. در چنین حالتی، تعداد یون هیدروژن تولید شده در محلول، کمتر از ذرات اسید یونیده نشده است.

ب) با جدا شدن یون هیدروژن از کربوکسیلیک اسیدها، یک آنیون ایجاد می‌شود که نام آن بر وزن (آلکانوات) خواهد بود. برای مثال، بر اثر یونش ذرات استیک اسید در محلول، یون استات با ساختار زیر تولید می‌شود:



در ساختار هر ذره از این یون چنداتمی، ۷ پیوند اشتراکی بین اتم‌ها برقرار شده است.

ج) استیک اسید، در مقایسه با هیدروسیانیک اسید، ثابت یونش بزرگ‌تری داشته و اسید قوی‌تری به شمار می‌رود. توجه داریم که هیدروسیانیک اسید، ضعیف‌ترین اسید مطرح شده در کتاب درسی است.

د) استیک اسید، ترکیبی است که باعث ایجاد مزهٔ ترش در سرکه می‌شود. این ماده خاصیت اسیدی داشته و به هنگام انحلال در آب، یونش پیدا می‌کند. یون‌های حاصل از یونش استیک اسید، در محلول حل‌شده و یک رسانای یونی را ایجاد می‌کنند.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۸۰- **اسید دو پروتون‌دار با فرمول شیمیایی H_2A، طی دو مرحله یونش یافته و غلظت یون هیدروژن را در محلول افزایش می‌دهد. اگر مقدار α برای مراحل اول و دوم یونش این ماده به ترتیب برابر با ۱ و ۰/۲ باشد، غلظت یون هیدرونیوم در محلول ۰/۱ مولار این اسید، چند برابر غلظت یون A^{2-} می‌شود؟**

۱) ۶ ۲) ۱/۲ ۳) ۴ ۴) ۰/۸

پاسخ: گزینهٔ ۱ (سخت ـ محاسباتی ـ زمان‌بر ـ صفحهٔ ۱۹ ـ ۱۲۰۱)

اسید دو پروتون‌دار با فرمول شیمیایی H_2A، وارد محلول آبی شده است. چون این اسید دارای ۲ هیدروژن است، پس طی دو مرحله متوالی یونش پیدا می‌کند. مرحله اول یونش این ماده، به‌صورت زیر است:

$$H_2A(aq) \longrightarrow HA^-(aq) + H^+(aq)$$

طبق فرض سؤال، مرحله اول یونش این ماده به‌صورت کامل انجام شده است. بر این اساس، اگر غلظت اولیه اسید در محلول خود معادل با ۰/۱ مول بر لیتر باشد، کل ذرات اسید در مرحله اول یونش شرکت کرده و غلظت یون‌های HA^- و H^+ در محلول مورد نظر به ۰/۱ مول بر لیتر می‌رسند. در این حالت، هیچ ذره H_2A در محلول باقی نمی‌ماند. در این رابطه، داریم:

$$0/1\ mol.L^{-1}\ H_2A \xrightarrow{\text{یونش}} \begin{cases} 0\ mol.L^{-1}\ H_2A \\ 0/1\ mol.L^{-1}\ HA^- \\ 0/1\ mol.L^{-1}\ H^+ \end{cases}$$

ذرات HA^- حاصل از مرحله اول یونش، در مرحله دوم یونش شرکت می‌کنند. مرحله دوم یونش این اسید به‌صورت زیر انجام می‌شود:

$$HA^-(aq) \rightleftharpoons A^{2-}(aq) + H^+(aq)$$

طبق فرض سؤال، درجه یونش مرحله دوم برابر با ۰/۲ است. از ۰/۱ مول بر لیتر ذرات HA^- موجود در محلول، ۰/۰۲ مول بر لیتر آن یونش یافته و بر این اساس، ۰/۰۲ مول بر لیتر یون هیدروژن جدید و ۰/۰۲ مول بر لیتر یون A^{2-} تولید می‌شود. طی این فرایند، ۰/۰۸ مول بر لیتر HA^- یونیده نشده نیز در محلول باقی می‌ماند. در این رابطه، داریم:

$$0/1\ mol.L^{-1}\ HA^- \xrightarrow{\text{یونش}} \begin{cases} 0/08\ mol.L^{-1}\ HA^- \\ 0/02\ mol.L^{-1}\ A^{2-} \\ 0/02\ mol.L^{-1}\ H^+ \end{cases}$$

در مرحله اول یونش، ۰/۱ مول بر لیتر یون هیدروژن و در مرحله دوم یونش نیز ۰/۰۲ مول بر لیتر یون هیدروژن تولید شد، پس در مجموع غلظت مولی یون هیدروژن در محلول برابر با ۰/۱۲ مول بر لیتر می‌شود. غلظت یون A^{2-} نیز برابر با ۰/۰۲ مول بر لیتر است. بر این اساس، داریم:

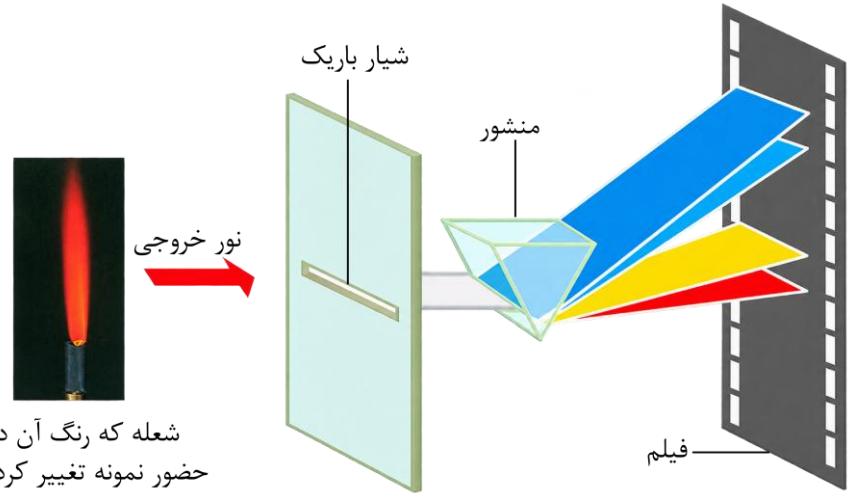
$$\frac{\text{غلظت یون } H^+}{\text{غلظت یون } A^{2-}} = \frac{0/12\ mol.L^{-1}}{0/02\ mol.L^{-1}} = 6$$

۸۱- **کدام مطلب، در رابطه با طیف نشری-خطی لیتیم نادرست است؟**

۱) شمار خطوط مرئی موجود در طیف نشری-خطی این ماده، با شمار خطوط مرئی در طیف نشری-خطی هیدروژن برابر است.
۲) پرتو آبی‌رنگ موجود در طیف نشری آن، در مقایسه با پرتو قرمز، به مقدار کمتری در منشور منحرف می‌شود.
۳) هر پرتو موجود در طیف نشری این ماده، حاصل بازگشت الکترون از لایه‌های بالاتر به لایه‌های پایین‌تر است.
۴) این طیف نشری-خطی را می‌توان با استفاده از شعله یک نمونه فلز لیتیم و یک منشور، به‌دست آورد.

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ مفهومی و حفظی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۲۳ ـ ۱۰۰۱)

اگر نور نشر شده از شعله یک ترکیب را از منشور عبور دهیم، به پرتوهای سازنده خود تفکیک شده و طیف نشری-خطی عنصر مورد نظر ایجاد می‌شود. برای مثال، طیف نشری-خطی عنصر لیتیم به‌صورت زیر تشکیل می‌شود:



طیف نشری-خطی حاصل از این عنصر، به‌صورت زیر نشان داده می‌شود:



هر عنصر، طیف نشری-خطی ویژه و مخصوص به خود را دارد و این طیف، مانند اثر انگشت، برای هر عنصر منحصربه‌فرد است. از این طیف می‌توان برای شناسایی یک عنصر در یک نمونه از ماده استفاده کرد. چون پرتو آبی در مقایسه با پرتو قرمز انرژی **بیشتری** دارد، پس می‌توان گفت پرتو **آبی‌رنگ** موجود در طیف نشری-خطی لیتیم، در مقایسه با پرتو قرمز، به مقدار **بیشتری** در منشور منحرف می‌شود.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) در طیف نشری-خطی لیتیم، ۴ خط مرئی وجود دارد. در طیف نشری-خطی هیدروژن نیز ۴ خط مرئی یافت می‌شود که به رنگ‌های قرمز، آبی کم‌رنگ، آبی پررنگ و بنفش دیده می‌شوند.

۳) با انتقال الکترون از لایه‌های بالاتر به لایه‌های پایین‌تر، مقداری انرژی آزاد می‌شود. هر پرتو موجود در طیف نشری-خطی عناصر مختلف، حاصل آزاد شدن مقداری انرژی طی بازگشت الکترون از لایه‌های الکترونی بالاتر به لایه‌های الکترونی پایین‌تر است.

۴) طیف نشری-خطی هر عنصر فلزی از جمله لیتیم، سدیم، آهن، منیزیم و ... را می‌توان با استفاده از شعله آن فلز و یک منشور، به‌دست آورد. برای این منظور، نور حاصل از شعله فلز مورد نظر را باید از منشور عبور داد.

۸۲- کدام موارد از عبارت‌های داده شده درست هستند؟

الف ـ در مدل بور، الکترون در تمام نقاط پیرامون هسته حضور دارد ولی در مکان‌های مشخص، احتمال حضور آن بیشتر است.

ب ـ مدل لایه‌ای، طیف نشری فلز سدیم را توجیه کرده و مطابق آن، هسته اتم بخش کمی از حجم آن را اشغال می‌کند.

ج ـ در طیف نشری هیدروژن، نوار سرخ ناشی از انتقال الکترون از لایه الکترونی $n = ۳$ به حالت پایه است.

د ـ با دور شدن از هسته اتم هیدروژن، تفاوت انرژی لایه‌های الکترونی متوالی کاهش پیدا می‌کند.

۱) «الف» و «ج» ۲) «الف» و «د» ۳) «ب» و «ج» ۴) «ب» و «د»

پاسخ: گزینهٔ ۴ (سخت ـ مفهومی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۲۷ ـ ۱۰۰۱)

عبارت‌های (ب) و (د) درست هستند.

بررسی موارد:

الف) در ساختار لایه‌ای اتم (نه مدل بور)، الکترون در هر لایه‌ای که باشد در همه نقاط پیرامون هسته حضور می‌یابد اما در محدوده یاد شده احتمال حضور بیشتری دارد. در مدل لایه‌ای، اتم را مانند کره‌ای در نظر می‌گیرند که هسته در فضایی **بسیار کوچک** و در مرکز آن جای دارد و الکترون‌ها در فضایی **بسیار بزرگ‌تر** و در لایه‌هایی پیرامون هسته توزیع می‌شوند. اطلاعات مربوط به هر دو مدل، در جدول زیر خلاصه شده‌اند:

مدل بور	مدل لایه‌ای
بررسی تعداد و جایگاه نوارهای رنگی در طیف نشری-خطی هیدروژن	به دنبال توجیه و علت ایجاد طیف نشری خطی و چگونگی نشر نور همه اتم‌ها
توجیه طیف نشری خطی هیدروژن	اتم را همانند کره‌ای در نظر می‌گیرد که هسته در مرکز قرار گرفته است.
عدم توجیه طیف نشری خطی سایر اتم‌ها	لایه‌ها را به سمت بیرون شماره‌گذاری می‌کنند (عدد کوانتومی اصلی)

مدل بور

دانشمندان به دنبال توجیه علت ایجاد طیف نشری ـ خطی هیدروژن، مدل‌های مختلفی را برای اتم ارائه دادند. نیلز بور بر این باور بود که از بررسی تعداد و جایگاه خطوط موجود در طیف نشری-خطی هیدروژن، می‌توان ساختار اتم هیدروژن را پیش‌بینی کرد. بور، سرانجام مدل اتمی خود را برای هیدروژن ارائه کرد. تصویر زیر، نمایی از ساختار اتمی بور را نشان می‌دهد:



بر اساس مدل بور، هسته در مرکز اتم قرار داشته و الکترون‌ها روی مدارهای دایره‌ای، در اطراف هسته چرخش می‌کنند. با دادن انرژی به اتم هیدروژن، الکترون موجود در این اتم برانگیخته شده و به لایه‌های بالاتر (دورتر از هسته) منتقل می‌شود. الکترون هنگام بازگشت به سوی هسته، انرژی اضافی خود را در قالب پرتوهای الکترومغناطیسی گسیل کرده و همین پرتوها، طیف نشری-خطی هیدروژن را تشکیل می‌دهند. اگرچه مدل بور با موفقیت توانست طیف نشری-خطی هیدروژن را توجیه کند، اما توانایی توجیه طیف نشری-خطی دیگر عنصرها از جمله هلیم، لیتیم و ... را نداشت.

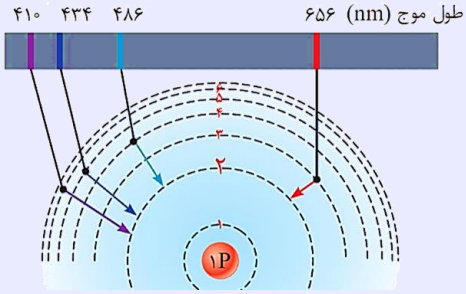
مدل بور ⟵ ✓ توجیه ساختار اتم هیدروژن
× توجیه ساختار اتم سایر عناصر

ب) مدل لایه‌ای، طیف نشری فلز سدیم و سایر عناصر موجود در جدول دوره‌ای را توجیه می‌کند. توجه داریم که مطابق مدل لایه‌ای، هسته اتم قسمت خیلی کوچکی از حجم آن را شامل شده و بیشتر حجم اتم توسط الکترون‌های موجود در آن اشغال شده است.

ج) در طیف نشری هیدروژن، نوار سرخ ناشی از انتقال الکترون از لایهٔ $n = ۳$ به $n = ۲$ است. به‌طور کلی، در اتم هیدروژن نوارهای رنگی وقتی ایجاد می‌شوند که الکترون‌ها از لایه‌های بالاتر به سمت لایهٔ $n = ۲$ منتقل شوند.

طیف نشری-خطی هیدروژن

با توجه به مدل کوانتومی، می‌توان گفت هر نوار رنگی در طیف نشری-خطی هر عنصر، پرتوهای نشر شده هنگام بازگشت الکترون‌ها را از لایه‌های بالاتر به لایه‌های پایین‌تر را نشان می‌دهد. برای مثال، در رابطه با اتم هیدروژن داریم:



همان‌طور که مشخص است، در اتم هیدروژن با بازگشت الکترون از لایه‌های الکترونی بالاتر به لایه $n = ۲$، پرتوهای مرئی گسیل می‌شود. هرچقدر که لایه مبدأ n بزرگ‌تری داشته باشد، پرتو گسیل شده انرژی بیشتر و طول موج کوتاه‌تری دارد.

با دور شدن از هسته اتم، انرژی لایه‌ها **افزایش** می‌یابد. از طرف دیگر، با دور شدن از هسته اختلاف انرژی دو لایه الکترونی متوالی نیز **کاهش** می‌یابد. برای مثال اختلاف انرژی لایه‌های الکترونی ششم و پنجم، کمتر از اختلاف انرژی لایه پنجم و چهارم است.

هیدروژن

در رابطه با عنصر هیدروژن، به نکات زیر توجه کنید:

- اولین عنصر جدول دوره‌ای بوده و یک عنصر نافلزی است. فراوان‌ترین عنصر موجود در سیارهٔ مشتری است که فراوانی حدود ۹۰ درصد دارد. همچنین، پس از مهبانگ، ابتدا ذرات زیراتمی ایجاد شده و سپس هیدروژن و هلیم به وجود آمدند.
- هیدروژن دارای ۳ ایزوتوپ طبیعی و ۴ ایزوتوپ ساختگی است. فراوان‌ترین ایزوتوپ هیدروژن ${}_{1}^{1}H$ است و دو ایزوتوپ ${}_{1}^{1}H$ و ${}_{1}^{2}H$ آن نیز پایدار محسوب می‌شوند. تنها رادیوایزوتوپ طبیعی هیدروژن ${}_{1}^{3}H$ است که نیم‌عمری در حدود ۱۲ سال دارد. همه ایزوتوپ‌های ساختگی هیدروژن، پرتوزا هستند و نیم‌عمر کمتر از 10^{-21} ثانیه دارند.
- مقایسه نیم‌عمر ایزوتوپ‌های ساختگی هیدروژن به‌صورت ${}_{1}^{7}H > {}_{1}^{4}H > {}_{1}^{6}H > {}_{1}^{5}H$ است.
- جرم اتمی پایدارترین ایزوتوپ آن، اندکی بیشتر از $1\ amu$ و حدود $1/008\ amu$ است.
- طیف نشری ـ خطی آن دارای ۴ نوار رنگی است. این نوارها به ترتیب طول موج، نوار بنفش با طول موج ۴۱۰، آبی پررنگ با طول موج ۴۳۴، آبی کم‌رنگ با طول موج ۴۸۶ و قرمز با طول موج ۶۵۶ نانومتر هستند. همان‌طور که مشخص است، پرتوهایی که طول موج کمتری دارند، به یکدیگر نزدیک‌تر هستند و با فاصلهٔ بیشتری از پرتو قرمز قرار دارند.
- حالت پایه برای الکترون موجود در اتم‌های این عنصر، تراز انرژی $n = 1$ است.

ماز

۸۳- کدام‌یک از مطالب زیر، درست است؟

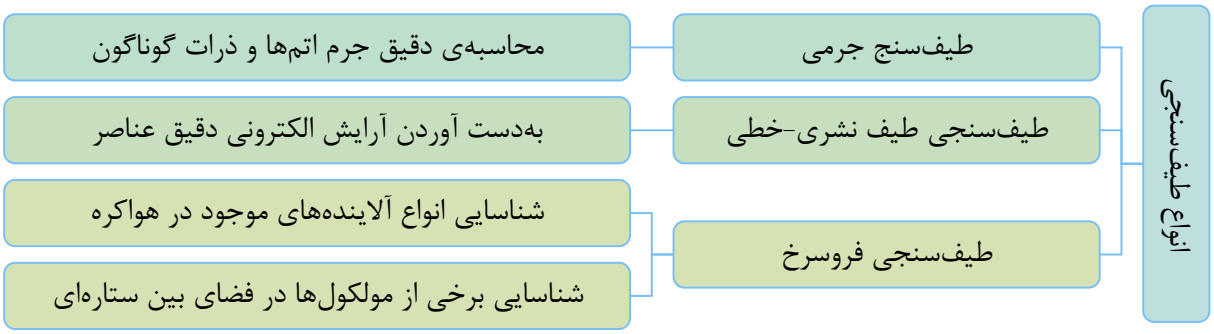
۱) طول موج رنگ نور خارج شده از لامپ نئون نسبت به طول موج نور هم‌رنگ با شعله مس(II) نیترات، کوتاه‌تر است.
۲) امروزه به کمک روش‌های طیف‌سنجی پیشرفته، می‌توان آرایش الکترونی ذرات کروم و منگنز را با دقت تعیین کرد.
۳) برخی از آنیون‌های موجود در یک نمونه خیارشور، پس از برانگیخته شدن، از خود نور زرد گسیل می‌کنند.
۴) آخرین زیرلایه اشغال شده در آخرین عنصر موجود در جدول تناوبی امروزی، دارای $n + l = 7$ است.

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ مفهومی و حفظی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۴۲ ـ ۱۰۰۱)

قاعده آفبا، آرایش الکترونی اتم اغلب عنصرها را پیش‌بینی می‌کند؛ اما برای اتم برخی عنصرهای جدول دوره‌ای مثل کروم و مس، نارسایی دارد. امروزه به کمک روش‌های طیف‌سنجی پیشرفته، آرایش الکترونی چنین اتم‌هایی را با دقت تعیین می‌کنند. در واقع، روش طیف‌سنجی می‌تواند آرایش الکترونی دقیق همه عناصر از جمله کروم و مس را به‌دست بیاورد. آرایش الکترونی دقیق کروم و مس که با استفاده از روش‌های طیف‌سنجی به‌دست‌آمده، به‌صورت زیر است:

${}_{24}Cr : [{}_{18}Ar]\ 3d^5\ 4s^1$ ${}_{29}Cu : [{}_{18}Ar]\ 3d^{10}\ 4s^1$

همان‌طور که مشخص است، در آرایش الکترونی این اتم‌ها یک الکترون از زیرلایه $4s$ به زیرلایهٔ $3d$ منتقل شده است؛ پس این اتم‌ها از قاعده آفبا پیروی نمی‌کنند. کاربردهای مختلف انواع طیف‌سنجی به‌صورت زیر است:



با توجه به توضیحات داده شده، امروزه به کمک روش‌های طیف‌سنجی پیشرفته، می‌توان آرایش الکترونی ذرات همه اتم‌ها را با دقت تعیین کرد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) تجربه نشان می‌دهد که بسیاری از نمک‌ها شعله رنگی دارند، به‌طوری‌که اگر مقداری از محلول نمک را با افشانه روی شعله بپاشیم، رنگ شعله تغییر می‌کند. شعله ترکیب‌های سدیم، لیتیم و مس هر یک رنگ منحصربه‌فردی دارد و رنگ نشرشده از هر یک، فقط باریکه بسیار کوتاهی از **گستره طیف مرئی** را دربرمی‌گیرد. جدول زیر رنگ شعله‌های این سه فلز را نشان می‌دهد:





سبز	زرد	سرخ
مس(II) نیترات	سدیم نیترات	لیتیم نیترات
مس(II) کلرید	سدیم کلرید	لیتیم کلرید
مس(II) سولفات	سدیم سولفات	لیتیم سولفات
فلز مس	فلز سدیم	فلز لیتیم

نور لامپ نئون، سرخ‌فام بوده و شعله مس(II) نیترات به رنگ سبز است؛ بنابراین طول موج نور لامپ نئون از طول موج نور شعله مس(II) نیترات، بلندتر است. توجه داریم که مقایسه طول موج رنگ‌های مرئی به‌صورت زیر است:

بنفش $<$ نیلی $<$ آبی $<$ سبز $<$ زرد $<$ نارنجی $<$ قرمز

۳) هرگاه جریان الکتریکی متناوب ۱۱۰ ولتی به یک خیارشور اعمال شود، خیارشور نور زردرنگ را از خود ساطع می‌کند. اعمال جریان الکتریکی به خیارشور باعث برانگیختگی الکترون‌ها در برخی از یون‌های سدیم می‌شود که با بازگشت به حالت پایه و طی فرایند نشر، نور زرد رنگ ایجاد می‌شود. توجه داریم که آنیون‌ها در این فرایند نقشی ندارند.

۴) آخرین عنصر جدول تناوبی با عدد اتمی ۱۱۸، یک گاز نجیب است که در دورهٔ هفتم و گروه هجدهم قرار دارد، بنابراین آخرین زیرلایهٔ اشغال‌شده آن زیرلایهٔ $7p$ است. بر این اساس، داریم:

$$n + l = ۷ + ۱ = ۸$$

۸۴- شمار الکترون‌های مبادله شده برای تشکیل ۲۴/۸ گرم منیزیم فلوئورید از عناصر سازنده، چند برابر شمار الکترون‌های مبادله شده برای تشکیل ۱۶۴/۸ گرم $NaBr$ از عناصر سازنده است؟ $(Br = ۸۰ , Mg = ۲۴ , Na = ۲۳ , F = ۱۹ : g.mol^{-1})$

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۰/۲۵ ۴) ۰/۵

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۳۹ ـ ۱۰۰۱)

برای به‌دست آوردن شمار مول‌های الکترون مبادله شده به ازای تشکیل یک مول ترکیب یونی، می‌توان از قاعده زیر بهره برد:

(بار کاتیون × زیروند کاتیون) = (قدرمطلق بار آنیون × زیروند آنیون) = شمار مول‌های الکترون مبادله شده

برای مثال به ازای تشکیل یک مول آلومینیم اکسید با فرمول شیمیایی $Al_۲O_۳$، تعداد ۶ مول الکترون بین عناصر سازنده مبادله می‌شود، چون بار کاتیون $(Al^{۳+})$ برابر $+۳$ بوده و زیروند آن در فرمول شیمیایی برابر ۲ است. همچنین بار آنیون $(O^{۲-})$ برابر -۲ بوده و زیروند آن در فرمول شیمیایی برابر ۳ است. ابتدا می‌توان تعداد مول الکترون مبادله شده به ازای تشکیل ۲۴/۸ گرم منیزیم فلوئورید با فرمول شیمیایی $MgF_۲$ را به‌دست آورد. برای تولید هر مول از این ماده از عناصر سازنده آن، ۲ مول الکترون بین گونه‌ها مبادله می‌شود.

بر این اساس، می‌توان نوشت:

$$?\,mol\,e^- = ۲۴/۸\,g\,MgF_۲ \times \frac{۱\,mol\,MgF_۲}{۶۲\,g\,MgF_۲} \times \frac{۲\,mol\,e^-}{۱\,mol\,MgF_۲} = ۰/۸\,mol$$

در قدم بعد، شمار الکترون‌های مبادله شده برای تشکیل نمونه سدیم برمید را محاسبه می‌کنیم. در این رابطه، داریم:

$$?\,mol\,e^- = ۱۶۴/۸\,g\,NaBr \times \frac{۱\,mol\,NaBr}{۱۰۳\,g\,NaBr} \times \frac{۱\,mol\,e^-}{۱\,mol\,NaBr} = ۱/۶\,mol$$

همان‌طور که مشخص است، تعداد الکترون مبادله شده در واکنش اول، نصف واکنش دوم است.

۸۵- کدام‌یک از مطالب زیر، نادرست است؟

۱) زیرلایه $۳d$ در دومین عنصری که آرایش الکترونی آن از قاعده آفبا پیروی نمی‌کند، به‌صورت کامل پر شده است.
۲) در هشت مورد از عناصر موجود در تناوب چهارم جدول دوره‌ای، لایه الکترونی $n = ۳$ کاملاً پر از الکترون است.
۳) شمار الکترون‌های موجود در بیرونی‌ترین زیرلایه الکترونی اتم کروم، با شمار این الکترون‌ها در گالیم برابر است.
۴) اگر تعداد الکترون ظرفیت اتمی کمتر یا برابر ۳ باشد، آن اتم در شرایط مناسب قطعاً به کاتیون تبدیل می‌شود.

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۳۷ ـ ۱۰۰۱)

طبق متن کتاب درسی، اگر تعداد الکترون‌های ظرفیتی اتمی کمتر یا برابر ۳ باشد، آن اتم اغلب در دسته فلزها قرار گرفته و تمایل دارد که الکترون‌های ظرفیتی خود را از دست داده و در شرایط مناسب، به کاتیون (یونی با بار مثبت) تبدیل شود. البته، با توجه به برخی از عناصر مثل بریلیم و بور، می‌توانیم ایراد علمی به این جمله وارد کنیم چراکه این عناصر، توانایی تشکیل یون تک‌اتمی پایدار را ندارند.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) دومین عنصری که آرایش الکترونی آن از قاعدهٔ آفبا پیروی نمی‌کند، $_{۲۹}Cu$ است که زیرلایهٔ $۳d$ در آن کاملاً پر شده است. نمودار زیر، نکات مختلف گفته شده در رابطه با مس را نشان می‌دهد:

فلز مس
- مس، نهمین عنصر واسطه موجود در جدول دوره‌ای است.
- فلز مس در شرایط استاندارد با محلول‌های اسیدی واکنش نمی‌دهد.
- فلز مس دارای دو یون پایدار با بار ۱+ و ۲+ است.
- رنگ شعلهٔ فلز مس و ترکیب‌های آن سبز است.
- مس از جمله عناصری است که آرایش الکترونی آن از قاعدهٔ آفبا پیروی نمی‌کند.
- وجود نمونه‌های خالصی از فلز مس در طبیعت گزارش شده است.
- مس واکنش‌پذیری کمی داشته و در شرکت مس سرچشمه در ایران تولید می‌شود.
- پوسته‌ها و کلوخه‌های غنی از فلز مس در کف اقیانوس‌ها یافت می‌شود.
- وسایل و ابزار گوناگونی مانند وسایل آشپزخانه، شیرآلات ساختمان و ... با استفاده از مس تولید می‌شوند.

۲) لایهٔ الکترونی $n = ۳$، شامل زیرلایه‌های $۳s$، $۳p$ و $۳d$ می‌شود. از میان عناصر موجود در تناوب چهارم، از عنصری با عدد اتمی ۲۹ به بعد، زیرلایه‌های $۳s$، $۳p$ و $۳d$ همگی پر از الکترون هستند. این عناصر شامل مس، روی، گالیم، ژرمانیم، آرسنیک، سلنیم، برم و کریپتون می‌شوند. آرایش الکترونی عنصر مس، به‌عنوان اولین عنصری که در آن زیرلایه‌های $۳s$، $۳p$ و $۳d$ پر از الکترون هستند، به‌صورت زیر است:

$$_{۲۹}Cu : [_{۱۸}Ar]\,۳d^{۱۰}\,۴s^{۱}$$

۳) گالیم، یک عنصر فلزی با عدد اتمی ۳۱ است که در خانه زیرین آلومینیم قرار گرفته است. این عنصر فلزی در واکنش با نافلزها، ۳ الکترون از دست داده و یون Ga^{3+} را ایجاد می‌کند. آرایش الکترونی کروم و گالیم به‌صورت زیر است:

$_{24}Cr : 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^5 4s^1$ $\qquad$ $_{31}Ga : 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^1$

در بیرونی‌ترین زیرلایهٔ الکترونی کروم، همانند بیرونی‌ترین زیرلایهٔ الکترونی گالیم، فقط یک الکترون وجود دارد.

۸۶- کدام‌یک از مطالب زیر، در رابطه با فلز آهن درست است؟

۱) این عنصر، با ۲ مورد از عناصری که در دما و فشار اتاق به شکل مولکول دواتمی دیده می‌شوند، هم‌تناوب است.
۲) اگر در هسته اتم این عنصر ۳۰ ذره زیراتمی بدون بار وجود داشته باشد، عدد جرمی آن برابر با ۵۴ می‌شود.
۳) این عنصر، به فراوانی در سیاره زمین وجود داشته و هر اتم آن، دارای ۷ زیرلایه الکترونی کاملاً پر است.
۴) مجموع مقدار $n+l$ الکترون‌های ظرفیتی موجود در هر اتم از این عنصر، برابر با ۳۸ است.

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ مفهومی ـ زمان‌بر ـ صفحهٔ ۴۳ ـ ۱۰۰۱)

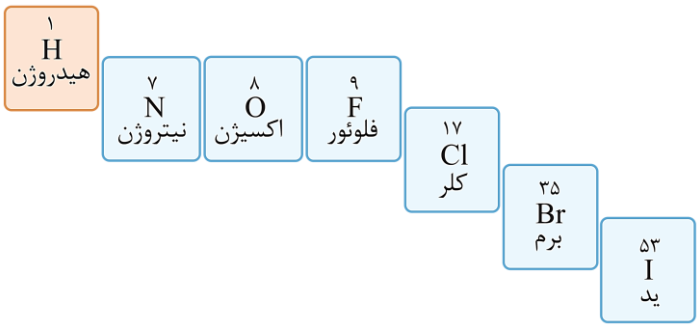
برای پیدا کردن مجموع مقدار $n+l$ الکترون‌های ظرفیتی یک عنصر، اول باید الکترون‌های ظرفیتی موجود در آن را پیدا کنیم. عنصر آهن با آرایش الکترونی $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^6 4s^2$، دارای ۸ الکترون ظرفیتی است که در زیرلایه‌های $3d$ و $4s$ قرار گرفته‌اند. داریم:

الکترون‌های ظرفیتی آهن $\longrightarrow$ $3d^6$ و $4s^2$

مجموع مقدار $n+l$ برای ۶ الکترون موجود در زیرلایهٔ $3d$ برابر با ۳۰ و برای ۲ الکترون موجود در زیرلایهٔ $4s$ برابر با ۸ است، پس می‌توان گفت مجموع مقدار $n+l$ الکترون‌های ظرفیتی در آهن، برابر با ۳۸ است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) آهن، متعلق به تناوب چهارم جدول دوره‌ای است. تصویر زیر، عناصری از جدول دوره‌ای را نشان می‌دهد که در دما و فشار اتاق، به شکل مولکول‌های دواتمی وجود دارند:



از میان عناصر نشان داده شده در تصویر بالا، فقط برم متعلق به تناوب چهارم است.

۲) عدد اتمی آهن برابر با ۲۶ است. عدد جرمی هر عنصر، مجموع عدد اتمی و تعداد نوترون‌ها در آن را نشان می‌دهد. اگر در هسته اتم آهن ۳۰ ذره زیراتمی بدون بار (نوترون) وجود داشته باشد، عدد جرمی آن برابر با ۵۶ می‌شود.

۳) آرایش الکترونی آهن به‌صورت $_{26}Fe : 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^6 4s^2$ است. در ساختار هر اتم از این عنصر، ۷ زیرلایه از الکترون اشغال‌شده و از بین این زیرلایه‌ها، ۶ مورد به‌طور کامل پر از الکترون هستند.

۸۷- عنصر X، در هر اتم خود دارای ۶ الکترون با $l=1$ و ۶ الکترون با $l=0$ است. نسبت شمار کاتیون به آنیون در نیترید فلز X، نصف شمار الکترون‌های مبادله شده در فرایند تولید هر واحد فرمولی از کدام ماده زیر است؟

۱) کلسیم فسفید ۲) پتاسیم کلرید ۳) لیتیم سولفید ۴) آلومینیم فلوئورید

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۳۹ ـ ۱۰۰۱)

الکترون‌های موجود در هر لایه، در ساختارهای کوچک‌تری به نام زیرلایه قرار می‌گیرند. در واقع، الکترون‌های موجود در هر لایه، در ساختار زیرلایه‌های مختلف، در اطراف هسته در حال گردش هستند. تعداد زیرلایه‌های موجود در ساختار هر لایه الکترونی، برابر با مقدار عدد کوانتومی اصلی (n) آن لایه است. موقعیت زیرلایه‌های الکترونی موجود در هر لایه را با استفاده از عدد کوانتومی فرعی (l) مشخص می‌کنند. اولین زیرلایهٔ الکترونی موجود در هر لایه با $l=0$ و با نماد s مشخص شده و سایر زیرلایه‌های الکترونی نیز به ترتیب با اعداد ۱ و بالاتر و با نمادهای p، d، f و g مشخص می‌شوند. داریم:

در لایه اول به بعد وجود دارد ⟵ با نماد s مشخص می‌شود ⟵ زیرلایه با $l=0$

در لایه دوم به بعد وجود دارد ⟵ با نماد p مشخص می‌شود ⟵ زیرلایه با $l=1$

در لایه سوم به بعد وجود دارد ⟵ با نماد d مشخص می‌شود ⟵ زیرلایه با $l=2$

در لایه چهارم به بعد وجود دارد ⟵ با نماد f مشخص می‌شود ⟵ زیرلایه با $l=3$

طبق فرض سؤال، عنصر X، در هر اتم خود دارای ۶ الکترون در زیرلایه‌های s و ۶ الکترون در زیرلایه‌های p است. آرایش الکترونی این عنصر، به‌صورت زیر خواهد بود:

$$X: 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2$$

عنصر X، معادل با منیزیم است. این فلز، در واکنش با نیتروژن، ۲ الکترون از دست داده و به یون Mg^{2+} تبدیل می‌شود. نیتروژن نیز در این واکنش، ۳ الکترون گرفته و به یون نیترید با فرمول N^{3-} تبدیل می‌شود. از کنار هم قرار گرفتن این دو یون، ترکیب منیزیم نیترید با فرمول Mg_3N_2 به‌دست می‌آید که نسبت شمار کاتیون به آنیون در آن برابر با ۱/۵ است. این مقدار، نصف شمار الکترون‌های مبادله شده در فرایند تولید هر واحد فرمولی از آلومینیم فلوئورید با فرمول شیمیایی AlF_3 است. در رابطه با ترکیب‌های داده شده در گزینه‌ها، داریم:

ترکیب	فرمول شیمیایی	تعداد الکترون مبادله شده
کلسیم فسفید	Ca_3P_2	۶
پتاسیم کلرید	KCl	۱
لیتیم سولفید	Li_2S	۲
آلومینیم فلوئورید	AlF_3	۳

فرمول‌نویسی مواد یونی

برای نوشتن فرمول شیمیایی ترکیب‌های یونی، کافی است ابتدا نماد کاتیون و سپس نماد آنیون را بنویسیم. زیروند کاتیون، برابر با بار مقدار آنیون بوده و زیروند آنیون، برابر با بار کاتیون خواهد شد. داریم:

$$A^{n+} \quad + \quad B^{m-}$$

نماد کاتیون [بار آنیون] نماد آنیون [بار کاتیون]

توجه داریم که اگر زیروندهای ایجاد شده قابل ساده شدن باشند، آن‌ها را با هم ساده می‌کنیم. برای به‌دست آوردن نام مواد یونی، از الگوی زیر استفاده می‌کنیم:

نام ترکیب یونی : اسم فلز + اسم نافلز + ید

هر ترکیب یونی از لحاظ بار الکتریکی خنثی است؛ زیرا مجموع بار الکتریکی کاتیون‌ها در ساختار این مواد با مجموع بار الکتریکی آنیون‌های موجود در ساختار آن‌ها برابر است.

SanjeshCloud

۸۸- در نمونه‌ای به جرم ۴۰/۶۵ گرم از مولکول PX_3، مجموع شمار اتم‌های فسفر با اتم‌های X برابر با $3/612 \times 10^{23}$ عدد است. اگر عنصر X متعلق به تناوب چهارم جدول دوره‌ای باشد، در هسته هر اتم آن چند نوترون وجود دارد؟ (عدد جرمی را برابر با جرم مولی در نظر بگیرید. $P = 31\ g.mol^{-1}$)

۱) ۳۵ ۲) ۴۵ ۳) ۴۰ ۴) ۳۰

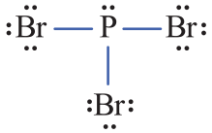
پاسخ: گزینهٔ ۲ (سخت ـ محاسباتی ـ زمان‌بر ـ صفحهٔ ۴۱ ـ ۱۰۰۱)

در هر مول از مولکول PX_3، یک مول اتم فسفر و سه مول اتم X وجود دارد، درنتیجه به ازای هر مول از PX_3، مجموع شمار اتم‌های موجود در ساختار این ماده برابر با ۴ مول است. اگر جرم مولی عنصر X را برابر با x گرم بر مول در نظر بگیریم، می‌توان نوشت:

$$\text{مجموع اتم } 3/612 \times 10^{23} = 40/65\ g\ PX_3 \times \frac{1\ mol\ PX_3}{(31+3x)\ g\ PX_3} \times \frac{4\ mol \text{ مجموع اتم}}{1\ mol\ PX_3} \times \frac{6/02 \times 10^{23} \text{ مجموع اتم}}{1\ mol}$$

$$\Rightarrow x = 80\ g.mol^{-1}$$

جرم مولی عنصر X برابر با ۸۰ گرم بر مول است. چون عدد جرمی با جرم مولی برابر است، لذا عدد جرمی اتم X نیز برابر با ۸۰ است. چون ترکیب PX_3، نوعی ماده مولکولی است، پس می‌توان گفت هر دو عنصر سازنده آن نافلز هستند. بر این اساس، X نافلزی از تناوب چهارم است، پس این عنصر می‌تواند معادل با یکی از عناصر سلنیم، برم و یا کریپتون باشد. از میان این عناصر، برم تنها عنصری است که در واکنش با فسفر، ترکیب PBr_3 را می‌تواند تشکیل بدهد. ساختار مولکولی این ماده به‌صورت زیر است:



در ساختار ترکیب PBr_3، هر اتم فسفر ۳ الکترون تک خود را با اتم‌های برم به اشتراک گذاشته و ۳ پیوند کووالانسی تشکیل داده است. می‌دانیم که عدد جرمی، مجموع تعداد نوترون‌ها و پروتون‌های موجود در ساختار هسته هر اتم را نشان می‌دهد. عدد اتمی برم برابر با ۳۵ است، پس هر اتم برم ۳۵ پروتون در ساختار خود دارد. درنتیجه اگر تعداد نوترون‌های موجود در اتم برم برابر با ۴۵ عدد باشد، عدد جرمی این عنصر برابر با ۸۰ می‌شود که با داده‌های سؤال هم‌خوانی دارد. در این رابطه، داریم:

$$\text{تعداد نوترون} = \text{عدد جرمی} - \text{عدد اتمی} = 80 - 35 = 45$$

۸۹- کدام‌یک از مطالب زیر، نادرست است؟

۱) کلر متعلق به تناوب سوم جدول دوره‌ای بوده و در اتم آن ۷ الکترون ظرفیتی وجود دارد.
۲) دومین عنصر از جدول دوره‌ای که متعلق به دستهٔ d است، در آرایش الکترونی خود ۵ زیرلایه ۲ الکترونی دارد.
۳) انرژی لایه‌های الکترونی موجود در اطراف هستهٔ هیدروژن، با انرژی لایه‌های الکترونی در اتم سدیم متفاوت است.
۴) از واکنش هر عنصر متعلق به دستهٔ s جدول دوره‌ای با یک نمونه از گاز فلوئور، نوعی ترکیب یونی به‌دست می‌آید.

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۳۸ ـ ۱۰۰۱)

هرچند که اغلب عناصر موجود در دستهٔ s جدول تناوبی فلز بوده و در واکنش با فلوئور، انواعی از مواد یونی را ایجاد می‌کنند، اما هیدروژن عنصری از این دسته است که نوعی نافلز به شمار رفته و در واکنش با فلوئور، مولکول هیدروژن فلوئورید را ایجاد می‌کند که نوعی ماده مولکولی است.

دسته‌بندی عناصر

عناصر موجود در جدول دوره‌ای را بر اساس اینکه آخرین الکترون موجود در آرایش الکترونی مرتب‌نشده آن‌ها وارد چه زیرلایه‌ای شده است، به چهار گروه s، p، d و f تقسیم می‌کنند. برای مثال، در رابطه با فلوئور، داریم:

$_{9}F : 1s^2 2s^2 2p^5$ → متعلق به دسته p است

در رابطه با اتم گالیم و آهن، داریم:

$_{31}Ga : 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^1$ → متعلق به دسته p است

$_{26}Fe : 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^6 4s^2$ → متعلق به دسته d است

الکترون‌هایی از یک اتم که در بیرونی‌ترین قسمت آن قرار می‌گیرند، الکترون‌های ظرفیتی نامیده می‌شوند. این الکترون‌ها، خواص شیمیایی اتم مورد نظر را مشخص می‌کنند. الکترون‌های ظرفیتی موجود در عناصر مختلف، به‌صورت زیر هستند:

الکترون‌های ظرفیتی		
دسته s	الکترون‌های موجود در آخرین زیرلایه s	
دسته d	الکترون‌های آخرین زیرلایه s به اضافه الکترون‌های آخرین زیرلایه d	
دسته p	الکترون‌های موجود در آخرین زیرلایه‌های s و p	

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) کلر متعلق به تناوب سوم جدول دوره‌ای بوده و در هریک از اتم‌های آن ۷ الکترون ظرفیتی وجود دارد. آرایش الکترونی کلر به‌صورت زیر است:

$_{17}Cl : 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^5$

به‌طور کلی، در آرایش الکترونی همه عناصر گروه ۱۷ جدول دوره‌ای، ۷ الکترون ظرفیتی وجود دارد. توجه داریم که در عناصر دستهٔ p، الکترون‌های ظرفیتی معادل با الکترون‌هایی هستند که در آخرین زیرلایه‌های s و p قرار می‌گیرند.

۲) اولین عنصر متعلق به دستهٔ d، معادل با اسکاندیم با عدد اتمی ۲۱ بوده و دومین عنصر متعلق به دستهٔ d، معادل با تیتانیم با عدد اتمی ۲۲ است. آرایش الکترونی تیتانیم به‌صورت است:

$_{22}Ti : 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^2 4s^2$

این عنصر در آرایش الکترونی خود **۵ زیرلایهٔ ۲ الکترونی** دارد.

۳) انرژی لایه‌های الکترونی موجود در اطراف هسته یک اتم به عدد اتمی آن بستگی دارد؛ پس انرژی لایه‌های الکترونی موجود در اطراف هسته هیدروژن، با انرژی لایه‌های الکترونی در اتم سدیم متفاوت است.

۹۰- کدام‌یک از مطالب زیر، درست است؟

۱) حداکثر گنجایش الکترونی یک زیرلایه با $l = 3$، با تعداد عناصر موجود در دستهٔ s برابر است.

۲) در واکنش تولید سدیم کلرید، اتم‌های سدیم با از دست دادن الکترون به آرایش گاز نجیب آرگون می‌رسند.

۳) عدد کوانتومی فرعی آخرین الکترونی که وارد آرایش الکترونی همه گازهای نجیب می‌شود، با هم برابر است.

۴) لایه چهارم الکترونی، از ۳ زیرلایه مختلف تشکیل شده و در اتم گوگرد، هیچ الکترونی در ساختار آن وجود ندارد.

پاسخ: گزینهٔ ۱ (آسان ـ مفهومی ـ سریع ـ صفحهٔ ۳۶ ـ ۱۰۰۱)

حداکثر گنجایش الکترونی یک زیرلایه با $l = 3$ (زیرلایه‌های f)، برابر با ۱۴ الکترون است. تعداد عناصر موجود در دستهٔ s نیز برابر با ۱۴ عدد است. با استفاده از عدد کوانتومی فرعی (l)، حداکثر گنجایش الکترونی یک زیرلایه را می‌توان به‌دست آورد:

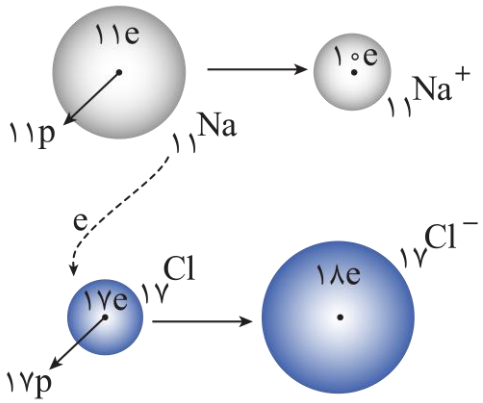
حداکثر گنجایش الکترونی یک زیرلایه $= 4l + 2$

به این ترتیب، حداکثر گنجایش الکترون‌ها در زیرلایه‌های s، p، d و f به ترتیب برابر ۲، ۶، ۱۰ و ۱۴ الکترون است. جدول زیر تعداد عناصر را در دسته‌های مختلف جدول دوره‌ای نمایش می‌دهد:

دستهٔ جدول دوره‌ای	s	p	d	f
شمار عناصر	۱۴	۳۶	۴۰	۲۸
نوع عناصر	فلز و نافلز	فلز، شبه‌فلز و نافلز	فلز	فلز
تعداد الکترون‌های ظرفیتی	۱ تا ۲	۳ تا ۸	۳ تا ۱۲	***
عدد اتمی اولین عنصر	۱	۵	۲۱	۵۷
عدد اتمی آخرین عنصر	۸۸	۱۱۸	۱۱۲	۱۰۲
تناوب‌های حاوی آن دسته	اول تا هفتم	دوم تا هفتم	چهارم تا هفتم	ششم و هفتم
موقعیت در جدول	سمت چپ	سمت راست	وسط جدول	وسط جدول
حالت فیزیکی عناصر	گاز و جامد	گاز، جامد و مایع	جامد و مایع	جامد

بررسی سایر گزینه‌ها:

۲) اتم سدیم در حالت خنثی، دارای ۱۱ الکترون در ساختار خود است. در واکنش تولید سدیم کلرید، اتم‌های سدیم با از دست دادن یک الکترون، به آرایش پایدار گاز نجیب نئون می‌رسند. فرایند تولید سدیم کلرید به‌صورت زیر است:



$$Na(s) \rightarrow Na^{+}(s) + e^{-} \qquad {}_{11}Na : [{}_{10}Ne]3s^{1} \Rightarrow {}_{11}Na^{+} : [{}_{10}Ne]$$

$$Cl_{2}(g) + 2e^{-} \rightarrow 2Cl^{-}(s) \qquad {}_{17}Cl : [{}_{10}Ne]3s^{2}3p^{5} \Rightarrow {}_{17}Cl^{-} : [{}_{18}Ar]$$

توجه داریم که در این فرایند، اتم کلر با گرفتن یک الکترون به آرایش الکترونی گاز نجیب بعد از خود، یعنی **آرگون** دست پیدا می‌کند.

۳) به‌جز **هلیم**، در سایر گازهای نجیب، آخرین الکترون وارد زیرلایهٔ p می‌شود؛ پس می‌توان گفت به‌جز هلیم، عدد کوانتومی فرعی آخرین الکترونی که وارد آرایش الکترونی همه گازهای نجیب می‌شود، با هم برابر است. توجه داریم که در اتم هلیم، آخرین الکترون وارد زیرلایهٔ $1s$ می‌شود.

۴) لایه سوم الکترونی، از ۳ زیرلایه و لایه چهارم الکترونی، از ۴ زیرلایهٔ مختلف تشکیل شده است. توجه داریم که در اتم گوگرد، هیچ الکترونی در ساختار لایه چهارم الکترونی وجود ندارد.

۹۱- کدام‌یک از مطالب زیر، نادرست است؟

۱) یک نمونه از گاز کلر، زرد رنگ بوده و از آن برای رنگ‌بری و گندزدایی استفاده می‌شود.
۲) برای تشکیل مولکول آمونیاک، ۶۰٪ الکترون‌های ظرفیتی اتم نیتروژن در تشکیل پیوند شرکت می‌کنند.
۳) اگر آرایش الکترونی Sr به‌صورت $[Kr]5s^2$ باشد، اتم‌های Sr در شرایط مناسب یون Sr^{2+} را می‌سازند.
۴) شمار کاتیون‌ها و آنیون‌ها در ساختار همه ترکیب‌های یونی برابر بوده و این مواد از نظر بار الکتریکی خنثی هستند.

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۴۱ ـ ۱۰۰۱)

هر ترکیب یونی از نظر بار الکتریکی خنثی است، ولی لزوماً نمی‌توان گفت که تعداد آنیون‌ها و کاتیون‌ها در آن برابر است. برای مثال در سدیم کلرید ($NaCl$)، تعداد یون‌های مثبت و منفی برابر است، چون یکی از یون‌ها، یک بار مثبت و دیگری یک بار منفی است. این در حالی است که در منیزیم کلرید ($MgCl_2$)، تعداد یون‌های منفی دو برابر تعداد یون‌های مثبت است؛ چون یون منیزیم دارای دو بار مثبت بوده و یون کلرید دارای یک‌بار منفی است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

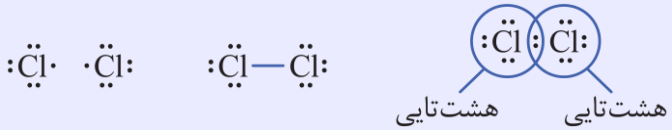
۱) کلر، یک گاز زرد رنگ بوده و یک نمونه از آن، خاصیت رنگ‌بری و گندزدایی دارد. از این گاز، برای تولید نمک خوراکی (سدیم کلرید) استفاده می‌شود. نمک طعام، از جمله منابع مورد استفاده انسان است که از زمین (منابع موجود در خشکی یا دریا) استخراج می‌شود.

۲) هیدروژن یک الکترون ظرفیتی داشته و طی تشکیل مولکول‌های آمونیاک، تنها الکترون ظرفیتی خود را با نیتروژن به اشتراک می‌گذارد و مولکول‌های چهار اتمی آمونیاک (NH_3) را تولید می‌کند. این در حالی است که هر اتم نیتروژن ۵ الکترون ظرفیتی داشته و طی تشکیل مولکول‌های آمونیاک، ۳ عدد از این الکترون‌ها را در تشکیل پیوند شرکت می‌دهد. ساختار مولکول آمونیاک به‌صورت زیر است:



واکنش میان دو نافلز

در واکنش میان دو نافلز، هیچ الکترونی مبادله نشده و الکترون‌ها به اشتراک گذاشته می‌شوند. در واقع برای تشکیل مولکول‌ها، هر اتم الکترون‌های جفت نشده خود را با سایر اتم‌ها به اشتراک گذاشته و پیوندهای اشتراکی را تشکیل می‌دهد. در این حالت، پیوندهای اشتراکی تشکیل شده و مولکول‌های دو یا چند اتمی ایجاد می‌شوند. برای مثال، در رابطه با اتم‌های کلر داریم:



به ساختاری که در آن اتم‌های موجود در یک مولکول به همراه جفت الکترون‌های پیوندی و ناپیوندی روی آن‌ها نمایش داده می‌شود، ساختار لوویس گفته می‌شود.

۳) اگر آرایش الکترونی فشردهٔ Sr به‌صورت $[Kr]5s^2$ باشد، این عنصر در گروه ۲ جدول تناوبی جای گرفته و هر اتم آن در شرایط مناسب با از دست دادن ۲ الکترون ظرفیتی خود، به یون Sr^{2+} تبدیل می‌شود.

۹۲- در ساختار چه تعداد از عناصر موجود در تناوب چهارم جدول دوره‌ای، اختلاف تعداد الکترون‌هایی با $n = ۴$ و تعداد الکترون‌هایی با $l = ۲$ برابر با ۴ است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۳۲ ـ ۱۰۰۱)

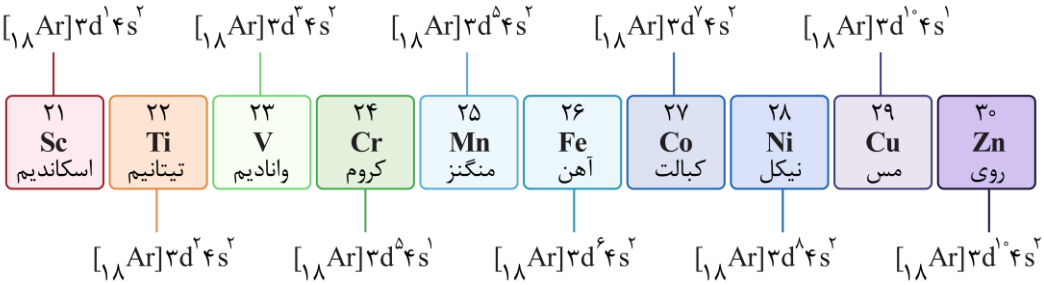
عناصر تناوب چهارم، در بازه عدد اتمی ۱۹ تا ۳۶ قرار گرفته‌اند. در عناصر با عدد اتمی در بازه ۲۰ تا ۲۳، بازه ۲۵ تا ۲۸ و عدد اتمی ۳۰، تعداد ۲ الکترون با $n = ۴$ وجود دارد. در عناصر با عدد اتمی ۱۹، ۲۴ و ۲۹، تعداد یک الکترون با $n = ۴$ وجود دارد و در عناصر با عدد اتمی ۳۱ تا ۳۶ نیز به ترتیب ۳ تا ۸ الکترون با $n = ۴$ وجود دارد. در ساختار عناصر کروم، آهن و سلنیم، اختلاف تعداد الکترون‌هایی با $n = ۴$ و تعداد الکترون‌هایی با $l = ۲$ برابر با ۴ است. آرایش الکترونی این عناصر به‌صورت زیر است:

$_{۲۴}Cr : ۱s^۲۲s^۲۲p^۶۳s^۲۳p^۶۳d^۵۴s^۱$

$_{۲۶}Fe : ۱s^۲۲s^۲۲p^۶۳s^۲۳p^۶۳d^۶۴s^۲$

$_{۳۴}Se : ۱s^۲۲s^۲۲p^۶۳s^۲۳p^۶۳d^{۱۰}۴s^۲۴p^۴$

آرایش الکترونی عناصر واسطه موجود در تناوب چهارم، به شرح زیر است:



۹۳- در رابطه با عنصری با عدد اتمی ۳۱، کدام موارد از عبارت‌های زیر درست هستند؟

الف ـ هر اتم از این عنصر، همانند هر اتم منگنز، در ساختار خود دارای ۸ الکترون با $l = ۰$ است.

ب ـ برای رسم آرایش الکترونی فشرده آن، همانند فسفر، از نماد گاز نجیب آرگون استفاده می‌شود.

ج ـ شمار الکترون‌های تک در آرایش الکترون-نقطه‌ای آن، با شمار این الکترون‌ها در نیتروژن برابر است.

د ـ در واکنش با اکسیژن، ترکیب یونی تولید می‌کند که شمار آنیون‌ها و کاتیون‌ها در آن با هم برابر است.

۱) «الف» و «د» ۲) «الف» و «ج» ۳) «ب» و «د» ۴) «ب» و «ج»

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ مفهومی و حفظی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۳۹ ـ ۱۰۰۱)

گالیم با نماد $_{۳۱}Ga$، در دستهٔ p جدول تناوبی جای داشته و خانه زیر آلومینیم را اشغال می‌کند. اتم‌های این عنصر در واکنش با نافلزها ۳ الکترون ظرفیتی خود را از دست داده و به یون $Ga^{۳+}$ تبدیل می‌شوند. در رابطه با گالیم، عبارت‌های (الف) و (ج) درست هستند.

بررسی موارد:

الف) آرایش الکترونی گالیم به‌صورت زیر است:

$_{۳۱}Ga : ۱s^۲۲s^۲۲p^۶۳s^۲۳p^۶۳d^{۱۰}۴s^۲۴p^۱$

آرایش الکترونی عنصر منگنز با عدد اتمی ۲۵ نیز به‌صورت زیر است:

$_{۲۵}Mn : ۱s^۲۲s^۲۲p^۶۳s^۲۳p^۶۳d^۵۴s^۲$

این دو اتم، در ساختار خود دارای ۸ الکترون با $l = ۰$ هستند.

ب) برای نوشتن آرایش الکترونی اتم‌ها با استفاده از نماد گازهای نجیب، می‌توانیم به‌صورت زیر عمل کنیم:

$[۱s^۲] \quad [۲s^۲۲p^۶] \quad [۳s^۲۳p^۶] \quad [۴s^۲۳d^{۱۰}۴p^۶] \quad [۵s^۲۴d^{۱۰}۵p^۶]$

$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$

$[_۲He] \quad [_{۱۰}Ne] \quad [_{۱۸}Ar] \quad [_{۳۶}Kr]$

SanjeshCloud

به آرایش الکترونی نوشته شده به کمک گازهای نجیب، **آرایش الکترونی فشرده** گفته می‌شود. برای نوشتن آرایش الکترونی فشرده هر عنصر، از نماد گاز نجیب قبل از آن استفاده می‌شود. گاز نجیب قبل از گالیم، معادل با **آرگون** بوده و گاز نجیب قبل از فسفر، معادل با **نئون** است.

ج) گالیم، عنصری از **گروه شماره ۱۳** جدول دوره‌ای بوده و دارای **۳ الکترون ظرفیتی** است، پس در آرایش الکترون-نقطه‌ای خود فقط ۳ الکترون تک دارد. نیتروژن، عنصری از گروه شماره ۱۵ جدول دوره‌ای بوده و دارای ۵ الکترون ظرفیتی است، پس در آرایش الکترون-نقطه‌ای خود دارای **یک جفت الکترون** و **۳ الکترون تک** است.

د) **گالیم**، در واکنش با اکسیژن، ۳ الکترون از دست داده و به یون Ga^{3+} تبدیل می‌شود. این یون با قرار گرفتن در کنار یون اکسید، ترکیب یونی با فرمول Ga_2O_3 را تشکیل می‌دهد که شمار آنیون‌ها در آن ۱/۵ برابر شمار کاتیون‌ها است.

۹۴- یک نمونه جامد از پتاسیم سلنید، در ساختار خود مجموعاً $3/612 \times 10^{23}$ یون دارد. تفاوت جرم آنیون و کاتیون موجود در ساختار این ماده برابر با چند گرم است؟ $(K = 39 , Se = 79 : g.mol^{-1})$

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۰/۴ ۴) ۰/۲

پاسخ: گزینهٔ ۴ (آسان ـ محاسباتی ـ سریع ـ صفحهٔ ۳۹ ـ ۱۰۰۱)

در قدم اول، مجموع شمار مول یون‌های موجود در ترکیب مورد نظر را محاسبه می‌کنیم:

$$?\,mol\ ion = 3/612 \times 10^{23}\ ion \times \frac{1\ mol\ ion}{6/02 \times 10^{23}\ ion} = 0/6\ mol$$

پتاسیم، فلزی از گروه اول بوده و در واکنش‌های شیمیایی، یون K^+ را تولید می‌کند. سلنیم، نافلزی از گروه ۱۶ جدول تناوبی بوده و در واکنش‌های شیمیایی، یون Se^{2-} را تولید می‌کند. از واکنش میان یون‌های تولید شده، ترکیب پتاسیم سلنید با فرمول شیمیایی K_2Se به‌دست می‌آید. در هر واحد فرمولی از این ماده، مجموعاً ۳ یون وجود دارد. بر این اساس، جرم پتاسیم و سلنیم موجود در یک نمونه پتاسیم سلنید که در ساختار خود مجموعاً $3/612 \times 10^{23}$ یون، معادل با ۰/۶ مول یون دارد را محاسبه می‌کنیم. در این رابطه، داریم:

$$?\,g\ K^+ = 0/6\ mol\ ion \times \frac{1\ mol\ K_2Se}{3\ mol\ ion} \times \frac{2\ mol\ K^+}{1\ mol\ K_2Se} \times \frac{39\ g\ K^+}{1\ mol\ K^+} = 15/6\ g$$

$$?\,g\ Se^{2-} = 0/6\ mol\ ion \times \frac{1\ mol\ K_2Se}{3\ mol\ ion} \times \frac{1\ mol\ Se^{2-}}{1\ mol\ K_2Se} \times \frac{79\ g\ Se^{2-}}{1\ mol\ Se^{2-}} = 15/8\ g$$

با توجه به محاسبات انجام شده، تفاوت جرم یون‌های پتاسیم و سلنید موجود در ترکیب مورد نظر برابر با $15/8 - 15/6 = 0/2$ گرم است. برای حل این سؤال، می‌توانستیم از ابتدا به این صورت استدلال کنیم که در هر مول پتاسیم سلنید، مجموعاً ۳ مول یون وجود داشته که حاوی ۲ مول یون پتاسیم (معادل با ۷۸ گرم یون پتاسیم) و یک مول یون سلنید (معادل با ۷۹ گرم یون سلنید) می‌شود، پس تفاوت جرم این یون‌ها در هر مول پتاسیم سلنید برابر با یک گرم است. بر این اساس، داریم:

$$?\,g\ \text{تفاوت جرم} = 3/612 \times 10^{23}\ ion \times \frac{1\ mol\ ion}{6/02 \times 10^{23}\ ion} \times \frac{1\ mol\ K_2Se}{3\ mol\ ion} \times \frac{1\ g\ \text{تفاوت جرم}}{1\ mol\ K_2Se} = 0/2\ g$$

۹۵- هر اتم از عنصر $_{x}^{۲۷}Z$، مجموعاً دارای ۷ الکترون با $l = ۱$ است. در یک نمونهٔ ۵ گرمی از سولفید این عنصر، چند آنیون وجود دارد؟ (جرم مولی هر عنصر، برابر با عدد جرمی آن در نظر گرفته شود. $S = ۳۲\ g.mol^{-۱}$)

۱) $۲/۴۰۸ \times ۱۰^{۲۳}$ ۲) $۳/۰۱ \times ۱۰^{۲۲}$ ۳) $۱/۲۰۴ \times ۱۰^{۲۳}$ ۴) $۶/۰۲ \times ۱۰^{۲۲}$

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۳۹ ـ ۱۰۰۱)

عدد کوانتومی فرعی(l) برای زیرلایه‌های p برابر با ۱ است. آلومینیم، عنصری است که در زیرلایهٔ $۲p$ آن ۶ الکترون و در زیرلایهٔ $۳p$ آن نیز ۱ الکترون قرار گرفته است. آرایش الکترونی این عنصر به‌صورت زیر است:

$$_{۱۳}Al : ۱s^{۲}۲s^{۲}۲p^{۶}۳s^{۲}۳p^{۱}$$

عدد اتمی آلومینیم، برابر با ۱۳ است، پس نماد اتم خواسته‌شده از این عنصر به‌صورت $_{۱۳}^{۲۷}Al$ می‌شود. با توجه به نماد این عنصر، می‌توان گفت جرم مولی آن برابر با ۲۷ گرم بر مول است. فلز آلومینیم در ترکیب با گوگرد، سه الکترون از دست داده و ماده‌ای با فرمول شیمیایی $Al_۲S_۳$ و با نام **آلومینیم سولفید** را تولید می‌کند. جرم مولی این ماده برابر با ۱۵۰ گرم بر مول است. بر این اساس، داریم:

$$?\ S^{۲-}\ \text{تعداد} = ۵\ g\ Al_۲S_۳ \times \frac{۱\ mol\ Al_۲S_۳}{۱۵۰\ g\ Al_۲S_۳} \times \frac{۳\ mol\ S^{۲-}}{۱\ mol\ Al_۲S_۳} \times \frac{۶/۰۲ \times ۱۰^{۲۳}\ S^{۲-}\ \text{تعداد}}{۱\ mol\ S^{۲-}} = ۶/۰۲ \times ۱۰^{۲۲}$$